# I. تذكير بالمكتسبات القبلية من خلال التمارين :

## 1) المكتسبات القبلية :

- المتتاليات المكبورة و المصغورة و المحدودة.
- المتتاليات التزايدية و التناقصية و الثابتة .
- المتتاليات الحسابية و الهندسية .
- البرهان بالترجع .

## 2) التمرين الأول :

$(U_n)$ متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 4} \end{cases}$

1) أحسب $U_1$ , $U_2$ .
2) بين بواسطة الترجع أن: $1 < U_n < 3$ ; $(\forall n \in IN)$.
3) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)$ .
4) نعتبر المتتالية $(V_n)$ بحيث مهما يكن n من : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$ .
   a) بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.
   b) حدد $V_n$ بدلالة n .
   c) حدد $U_n$ بدلالة $V_n$ ، ثم استنتج $U_n$ بدلالة n .
5) نضع : $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_n$ و $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{3}{U_n + 2}$ .
   a) أحسب $G_n$ بدلالة n .
   b) تحقق أن : $1 - V_n = \dfrac{3}{U_n + 2}$ .
   c) استنتج $S_n$ بدلالة n .

## 3) التمرين الثاني :

$(U_n)$ متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3} \end{cases}$

1) بين بواسطة الترجع أن: $U_n \neq 5$ ; $(\forall n \in IN)$ .
2) بين بواسطة الترجع أن: $5 \leq U_n \leq 11$ ; $(\forall n \in IN)$ .
3) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)$.
4) نعتبر المتتالية $(V_n)$ بحيث مهما يكن n من : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 5}$.
   a) بين أن $(V_n)$ متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$ محددا حدها الأول $V_0$.
   b) حدد $V_n$ بدلالة n .
   c) حدد $U_n$ بدلالة $V_n$ ، ثم استنتج $U_n$ بدلالة n .
5) نضع $S_n = \dfrac{1}{U_0 - 5} + \dfrac{1}{U_1 - 5} + \cdots + \dfrac{1}{U_n - 5}$ .
   أحسب $S_n$ بدلالة n .

# II. نهاية متتالية :

## 1) المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة :

نقول أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة إذا كانت لها نهاية تنتمي الى IR عندما يؤول المتغير n الى $+\infty$ . أي أن $\lim_{n \to +\infty} U_n \in IR$

وفي جميع الحالات الأخرى نقول أن المتتالية $(U_n)$ غير متقاربة أوأنها متباعدة .

## 2) المتتاليات على شكل $U_n = f(n)$ :

a) خاصية : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) تطبيقات:

- **التطبيق 1 :**

أحسب نهاية المتتالية $(U_n)$ عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $U_n = 3n^4 - 5n^2 - 7$ | $U_n = \dfrac{-3n^2 - 4n^5 - 11}{2n^2 - 4}$ | $U_n = \dfrac{-3n^2 - 6n + 5}{2n^2 - 4}$ | $U_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 3}{5n^5 - 2n + 5}$ |

إجابات :

..............................................

- **التطبيق 2 :**

أحسب نهاية المتتالية $(U_n)$ عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $U_n = 5\sqrt{3n^2+n+1} - 7$ | $U_n = 5\sqrt{2n+1} - 7\sqrt{3n-2}$ | $U_n = 5\sqrt{2n^2+1} - 7\sqrt{3n-2}$ |

إجابات :

.............................................

3) **خاصيات النهايات :**

a) خاصية 1 :

$(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان بحيث : $U_n \le V_n$ ; $(\forall n \in IN)$ .

- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ .
- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ .

b) خاصية 2 :

$(a_n)$ و $(b_n)$ و $(U_n)$ متتاليات عددية بحيث : $a_n \le U_n \le b_n$ ; $(\forall n \in IN)$ .

إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ .

c) تطبيقات :

- **التطبيق 3 :**

**نعتبر المتتالية** $(U_n)$ ***المعرفة كما يلي:*** $(\forall n \in IN) \quad U_n = \dfrac{3^n}{n+1}$

**1) أحسب :** $U_0$ و $U_1$ و $U_2$

**2) أدرس تغيرات المتتالية** $(U_n)$ .

**3) بين بواسطة الترجع أن :** $n < U_n$ ; $(\forall n \in IN)$

**4) استنتج نهاية المتتالية** $(U_n)$.

إجابات :

.............................................

- **التطبيق 4 :**

**نعتبر المتتالية** $(U_n)_{n\ge1}$ ***المعرفة كما يلي:*** $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

**1) أحسب :** $U_1$ و $U_2$ و $U_3$

**2) بين أن :** $(\forall n \in IN^*)$ ; $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

**3) استنتج نهاية المتتالية** $(U_n)$.

إجابات :

.............................................

- **التطبيق 5 :**

**نعتبر المتتالية** $(U_n)$ ***المعرفة كما يلي:*** $(\forall n \in IN) \quad U_n = \dfrac{\sin n}{n^2+1}$

**1) بين أن :** $(\forall n \in IN)$ ; $-\dfrac{1}{n^2+1} \le U_n \le \dfrac{1}{n^2+1}$

**2) استنتج نهاية المتتالية** $(U_n)$.

إجابات :

.............................................

## 4) دراسة نهاية المتتالية $a^n$ :

- الحالة الأولى $a>1$ : نضع $a=1+\alpha$ ، بما أن $a>1$ فإن $\alpha>0$ .

لنبين بالترجع أن : $a^n>1+n\alpha_n \quad ; \quad (\forall n\in IN)$

إجابات :

.............................................

نهاية المتتالية $a^n$ : لدينا $a^n>1+n\alpha \quad ; \quad (\forall n\in IN)$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n\alpha)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$

- الحالة الثانية $-1<a<1$ : نعتبر أن $a\neq 0$ .

لدينا $|a|<1$ ومنه فإن $\frac{1}{|a|}>1$ ، حسب الحالة الأولى فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^n=+\infty$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{|a|^n}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}|a|^n=0$

و هكذا نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$

خاصية :

- إذا كان $-1<a<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$ .
- إذا كان $1<a$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$ .
- إذا كان $a\leq -1$ فإن المتتالية $(a^n)$ **لا تقبل نهاية** .
- إذا كان $a=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=1$ .

- **تطبيق 6 :**

أحسب نهاية المتتالية $(U_n)$ عندما يؤول $n$ الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $U_n=5\sqrt{3n+1}-7\left(\frac{2}{5}\right)^n$ | $U_n=\left(-\frac{13}{17}\right)^n$ | $U_n=\sqrt{2n^2+1}+7.3^n$ |

إجابات :

.............................................

تجدون أسفله التمارين التطبيقية الواردة في الدرس

يُحبذ طبع هذه التمارين وتقديمها للتلاميذ بهدف إلصاق كل تمرين في مكانه المناسب على دفتر الدروس

تلافيا لضياع الوقت في الكتابة

بعد ذلك يكتب الحل بشكل عادي على دفتر الدروس

أنظر الصفحة الموالية

.I

(1

## (2 التمرين الأول :

$(U_n)$ متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n+2}{U_n+4} \end{cases}$

6) أحسب $U_1$ , $U_2$ .

7) بين بواسطة الترجع أن: $1 < U_n < 3$ ; $(\forall n \in IN)$.

8) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)$ .

9) نعتبر المتتالية $(V_n)$ بحيث مهما يكن n من : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$ .

d) بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

e) حدد $V_n$ بدلالة n .

f) حدد $U_n$ بدلالة $V_n$ ، ثم استنتج $U_n$ بدلالة n .

10) نضع : $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_n$ و $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{3}{U_n+2}$ .

d) أحسب $G_n$ بدلالة n .

e) تحقق أن : $\dfrac{3}{U_n+2} = 1 - V_n$ .

f) استنتج $S_n$ بدلالة n .

## (3 التمرين الثاني :

$(U_n)$ متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3} \end{cases}$

6) بين بواسطة الترجع أن: $U_n \neq 5$ ; $(\forall n \in IN)$ .

7) بين بواسطة الترجع أن: $5 \le U_n \le 11$ ; $(\forall n \in IN)$ .

8) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)$.

9) نعتبر المتتالية $(V_n)$ بحيث مهما يكن n من : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 5}$ .

d) بين أن $(V_n)$ متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$ محددا حدها الأول $V_0$ .

e) حدد $V_n$ بدلالة n .

f) حدد $U_n$ بدلالة $V_n$ ، ثم استنتج $U_n$ بدلالة n .

10) نضع $S_n = \dfrac{1}{U_0-5} + \dfrac{1}{U_1-5} + \cdots + \dfrac{1}{U_n-5}$ .

أحسب $S_n$ بدلالة n .

.II

### • التطبيق 1 :

أحسب نهاية المتتالية $(U_n)$ عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $U_n = 3n^4 - 5n^2 - 7$ | $U_n = \dfrac{-3n^2 - 4n^5 - 11}{2n^2 - 4}$ | $U_n = \dfrac{-3n^2 - 6n + 5}{2n^2 - 4}$ | $U_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 3}{5n^5 - 2n + 5}$ |

### • التطبيق 2 :

أحسب نهاية المتتالية $(U_n)$ عندما يؤول n الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $U_n = 5\sqrt{3n^2 + n + 1} - 7$ | $U_n = 5\sqrt{2n+1} - 7\sqrt{3n-2}$ | $U_n = 5\sqrt{2n^2+1} - 7\sqrt{3n-2}$ |

### • التطبيق 3 :

نعتبر المتتالية $(U_n)$ *المعرفة كما يلي:* $U_n = \dfrac{3^n}{n+1}$ $(\forall n \in IN)$

5) أحسب : $U_0$ و $U_1$ و $U_2$

6) أدرس تغيرات المتتالية $(U_n)$ .

7) بين بواسطة الترجع أن : $n < U_n$ ; $(\forall n \in IN)$

8) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$.

### • التطبيق 4 :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ *المعرفة كما يلي:* $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4) أحسب : $U_1$ و $U_2$ و $U_3$

5) بين أن : $(\forall n \in IN^*)\ ;\ 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

6) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$.

- **التطبيق 5 :**

نعتبر المتتالية $(U_n)$ *المعرفة كما يلي:* $(\forall n \in IN)\quad U_n = \frac{\sin n}{n^2+1}$

3) بين أن : $(\forall n \in IN)\ ;\ -\frac{1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n^2+1}$

4) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$.

- **تطبيق 6 :**

أحسب نهاية المتتالية $(U_n)$ عندما يؤول $n$ الى $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $U_n = \sqrt{2n^2+1}+7.3^n$ | $U_n = \left(-\frac{13}{17}\right)^n$ | $U_n = 5\sqrt{3n+1}-7\left(\frac{2}{5}\right)^n$ |

Bonne Chance