

قسم: 1 ع.ر. 2.	فرض محروس رقم 4	الثانوية التأهيلية طارق بن زياد - أزرو
بتاريخ: 2009/01/21		الأستاذ: المصطفى وبيجي

### التمرين 1: (4.5 ن)

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \text{ ونضع لكل } n \in \mathbb{N} : v_n = 2 - u_n$$

(1) أثبت أن  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  وحدد حدها الأول  $v_0$ .

(2) عبر عن  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$ .

(3) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  عبر بدلالة  $n$  عن المجموع  $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i$  ثم استنتج بدلالة  $n$  المجموع  $S'_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$

### التمرين 2: (1.5 ن)

$$\text{أثبت أن } \forall x \in \mathbb{R}^* : \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \text{ واستنتج النهاية } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

### التمرين 3: (3.75 ن)

نعتبر الدالة العددية  $f$  لمتغير حقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

تحقق أن  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$  ثم ادرس نهايات الدالة  $f$  عند محددات  $D_f$ .

### التمرين 4: (3 ن)

$$\text{ادرس النهايتين التاليتين : (1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 2x}{\tan x + x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x})$$

### التمرين 5: (4.75 ن)

نعتبر المتتالية العددية  $(w_n)$  المعرفة بما يلي :  $w_0 = 1$  و  $w_{n+1} = \frac{w_n^2}{2 + w_n}$

(1) أثبت أن  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < w_n \leq 1$

(2) أثبت أن المتتالية  $(w_n)$  تناقصية قطعاً.

$$(3) \text{ أ) أثبت أن : } \forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n = \frac{w_n(w_n - 2)}{2(w_n + 2)}$$

ب) استنتج أن :  $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n$

$$\text{ج) أثبت أن : } \forall n \in \mathbb{N} : w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

### التمرين 6: (2.5 ن)

نعتبر  $a$  عدداً حقيقياً موجب قطعاً.

$$\text{ادرس النهاية التالية : } \lim_{x \rightarrow a^2} g(x) \text{ حيث } g(x) = \frac{\sqrt{x} + x - a - a^2}{x\sqrt{x} + x\sqrt{a} - a^2\sqrt{x} - a^2\sqrt{a}}$$