التمرين الأول : (10 ن)

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\forall x>0 \quad ; \quad g(x)=1-x+\ln(x)$

(C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) a) أحسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. 0,25pts 0,25pts

b) أحسب $g(1)$. 0,25pts

2) a) أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0,25pts

b) أنجز جدول تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$. 0,25pts

c) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$. 0,25pts

3) a) أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة g. 0,25pts 0,25pts

b) أنشئ (C_g) منحنى الدالة g في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعطي :

$g(11)=-7,5 \quad ; \quad g(7)=-4 \quad ; \quad g(4)=-1,6$ 1pts

4) a) بين أن الدالة G المعرفة بالصيغة $G(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2$ هي دالة أصلية للدالة g. 0,5pts

b) أحسب التكامل : $I=\int_1^e g(x)dx$. 0,25pts

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\ln(x)-x+1 & ; \quad x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

(C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في نفس المعلم السابق $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) أدرس اتصال الدالة f على اليمين في الصفر. 0,5pts

b) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر ثم أول النتيجة هندسيا . 0,5pts

2) a) أحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 0,5pts

b) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. 0,25pts 0,25pts

c) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. 0,25pts

3) a) أحسب $f'(x)$. 0,5pts

b) بين أن $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x}) \quad ; \quad \forall x>0$. 0,25pts

c) أحسب $f(1)$ ثم $f'(1)$ واعط تأويلا هندسيا للنتيجة . 0,25pts 0,25pts

d) أدرس تغيرات الدالة f . 0,25pts

4) a) تحقق أن : $f(x)-g(x)=(\sqrt{x}-1)\ln(x)$. 0,25pts

b) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) . 0,5pts

5) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعطي :

$f(11)=-2 \quad ; \quad f(7)=-1 \quad ; \quad f(4)=-0,3$ 1pts

6) a) حدد دالة أصلية للدالة h بحيث $h(x)=\sqrt{x}-1$. 0,5pts

b) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب : $J=\int_1^e(\sqrt{x}-1)\ln(x)dx$. 0,5pts

c) أستنتج مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمان $(\Delta):x=1$ و $(\Delta'):x=e$. 0,25pts

التمرين الثاني : (6 ن)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \ ; \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$$

1) نعتبر المتتالية (V_n) بحيث: $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$.

a) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$. 0,5pts

b) أحسب V_n بدلالة n . 0,5pts

2) نضع $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$.

a) بين أن $S_n = 3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. 0,5pts

b) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. 0,5pts

3) نعتبر المتتالية (W_n) بحيث: $W_n = \frac{U_n}{V_n}$.

a) بين أن $W_{n+1} - W_n = 2$ واستنتج طبيعة (W_n). 0,5pts

b) أحسب W_n بدلالة n . 0,5pts

c) أحسب $S_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$. 0,5pts

4) a) بين أن : $U_n = \frac{3n-1}{2^n}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$. 0,5pts

b) بين الترجع أن: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$; $(\forall n \geq 2)$. 0,5pts

c) استنتج أن $0 < \frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$; $(\forall n \geq 2)$ 0,5pts

5) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 1pts

التمرين الثالث : (4 ن)

1) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ ؛

النقط A و B و C و D و E التي ألحاقها على التوالي هي :

$a = -3 - i$ و $b = -3 + i$ و $c = 1 + 4i$ و $d = 1 + 2i$ و $e = 1 - i$

a) بين أن : ABCD متوازي أضلاع . 0,5pts

b) حدد لحق النقطة K مركز متوازي الأضلاع ABCD. 0,5pts

c) بين أن : $\frac{d-e}{a-e} = -\frac{3}{4}i$ ثم أكتب العدد $\frac{d-e}{a-e}$ على الشكل الأسي . 0,25pts 0,75pts

d) استنتج أن المثلث EAD قائم الزاوية في E وأن $ED = \frac{3}{4}EA$. 0,25pts 0,25pts

2) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه النقطة D ونسبته $-\frac{2}{3}$.

a) بين أن $z' = -\frac{2}{3}z + \frac{5}{3}(1+2i)$. 0,5pts

b) تحقق من أن $h(E) = C$ 0,5pts

c) بين أن $|a - z_K| = |e - z_K|$ استنتج طبيعة المثلث AKE . 0,5pts