الجزء الاول:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x};x>0 \\ f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x-\ln 2;x\le 0 \end{cases}$$

1) بين ان $\left(\forall x>0;x>\ln x\right)$ ثم حدد مجموعة تعريف الدالة f . $(1pt)$

2) ادرس اتصال و اشتقاق الدالة f على اليمين في 0. $(1pt)$

3) بين ان : $\left(\forall x>0;\ f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\right)$ و ان $\left(\forall x\le 0;\ f'(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$. $(1pt)$

4) ادرس الفرعين اللانهائيين ل C_f . $(1pt)$

5) أ) ضع جدولا لتغيرات الدالة f . $(0,25pt)$

ب) انشئ C_f في معلم متعامدممنظم (خد $2cm$ للوحدة). $(1pt)$

الجزء الثاني:

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_{-\ln 2}^{0}\left(f'(x)\right)^n dx$

1) أ) بين ان : $\left(\forall x\le 0;\ f''(x)=1-\left(f'(x)\right)^2\right)$. $(1pt)$

ب) احسب I_1 و I_2. $(1pt)$

2) أ) بين ان : $\left(f'(x)\right)^{n+2}-\left(f'(x)\right)^n=-\left(\dfrac{\left(f'(x)\right)^{n+1}}{n+1}\right)'$. $(1pt)$

ب) استنتج ان : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*;I_{n+2}=I_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$. $(1pt)$

ج) احسب I_3 و I_4. $(1pt)$

3) أ) بين ان : $\left(\forall x\in[-\ln 2,0];-\dfrac{3}{5}\le f'(x)\le 0\right)$. $(1pt)$

ب) استنتج ان : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*;\left|I_n\right|\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\ln 2\right)$. $(1pt)$

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\ln 2}^{0}\left(f'(x)\right)^n dx$. $(0,25pt)$

الجزء الثالث

لتكن F الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ب: $F(x)=\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$

1) أ) بين ان $\left(\forall x\in\left]0,e^2\right];0\le F(x)\le\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)\right).(0,5pt)$

ب)استنتج ان F قابلة للاشتقاق على يمين 0 . $(0,5pt)$

2)بين ان F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و ان $\forall x>0;F'(x)=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}\right)}.(1pt)$

3) أ) بين ان : $\forall t\in[1,+\infty[;1+\dfrac{\ln t}{t}\le f(t)\le 1+\ln t$. $(1pt)$

ب) استنتج ان : $\forall x\in[1,+\infty[;\sqrt{x}-1+\dfrac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{2}\le F(x)-F(1)\le\sqrt{x}\ln\sqrt{x}.(1pt)$

ج)ادرس الفرع اللانهائي ل C_F عند $+\infty$. $(0,5pt)$

4) أ) احسب $F'(x)$ و $F''(x)$ لكل x من $]0,+\infty[.(1pt)$

ج)استنتج ان F تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ وان C_F يقبل نقطة انعطاف افصولها $1.(1pt)$

د)انشئ C_F في معلم متعامد ممنظم (خذ $2cm$ للوحدة). $(1pt)$

انتهى