المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

ثانوية محمد الخامس التأهيليةبالصويرة
الإمتحان التجريبي للبكالوريا
دورة ماي 2013

المادة	الرياضيات	NS24	المعامل	9
الشعب(ة) او المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز	4

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

يتكون الموضوع من ثلاث تمارين و مسألة

- **التمرين الاول في الأعداد العقدية** $(3,25pts)$
- **التمرين الثاني في البنيات الجبرية** $(4pts)$
- **التمرين الثالث في الحسابيات** $(2,75pts)$
- **المسألة في التحليل.** $(10pts)$

التمرين الاول في الأعداد العقدية $(3,25pts)$

المستوى منسوب الى م م م م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر الدائرة $\mathcal{C}$ ذات المركز O و الشعاع 2 و نضع $\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لتكن A B و C على التوالي صور الاعداد العقدية $\alpha+\overline{\alpha}$ α و $\overline{\alpha}$

1) بين أن النقط A B و C تنتمي الى الدائرة $\mathcal{C}$. $(0,25pt)$

2) بين أن $\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8$. $(0,25pt)$

ليكن θ من المجال $]-\pi,\pi[$ و D النقطة ذات اللحق $2e^{i\theta}$ و E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

3) بين أن $z_E=\alpha e^{i\theta}$. $(0,5pt)$

4) نضع $z_F=\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$ و $z_G=\frac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}$

أ) بين أن F هو منتصف $[BD]$ و G هو منتصف $[CE]$. $(0,25pt)$

ب) بين أن $\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}$. $(0,25pt)$

ج) استنتج طبيعة المثلث AFG $(0,5pt)$

5) أ) ين أن $|z_F-2|^2=4-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$. $(0,5pt)$

ب) تحقق من أن $3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$. $(0,25pt)$

ج) استنتج قيمة θ التي تكون من أجلها المسافة AF قصوية . $(0,5pt)$

التمرين الثاني في البنيات الجبرية $(4pts)$

الجزئين I و II مستقلين

I) نعتبر الفضاء المتجهي $(\mathcal{P}_n,+,.)$ حيث $\mathcal{P}_n$ هي مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو تساوي n $(n\in\mathbb{N}^*)$

نضع $E=\{p\in\mathcal{P}_n \ / \ p(1)=0\}$

1) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي. $(0,5pt)$

2) ليكن $p\in E$ حيث $\forall x\in\mathbb{R}, p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ مع (a_k) متتالية عددية.

أ) بين أن $p(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(x^k-1\right)$. $(0,5pt)$

ب) نضع $p_k(x)=x^k-1$ بين أن الأسرة $\mathrm{B}_n=(p_1,p_2,...,p_n)$ مولدة للفضاء E . $(0,5pt)$

3) أ) نفترض أن $n=3$ بين أن B_3 أساس ل E. $(0,5pt)$

ب) نفترض أن $p(x)=(x-1)^3$ حدد احداثيات p في الأساس B_3. $(0,5pt)$

II) نضع $F=\left\{M_{(x)}=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}/\, x\in\mathbb{R}\right\}$

1) أ) أحسب $M_{(x)}\times M_{(-x)}$ ماذا تستنتج؟ $(0,5pt)$

ب) بين أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية. $(0,5pt)$

2) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*; M_{(x)}+M_{(x)}^2+...+M_{(x)}^n=nM_{\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}$. $(0,5pt)$

التمرين الثالث في الحسابيات $(2,75pts)$

الجزئين I) و II) مستقلين

I) ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\wedge 2013=1$

1) أ) حدد القواسم الأولية الموجبة للعدد 2013. $(0,25pt)$

ب) بين أن $n^2\equiv 1(3)$ و $n^{60}\equiv 1(61)$ و $n^{10}\equiv 1(11)$. $(0,5pt)$

2) بين أن $n^{120}\equiv 1(2013)$. $(0,5pt)$

II) نعتبر العدد $A=\overline{2x122y13}_{(10)}$

1) أ) بين أن 3 يقسم A يكافئ $x+y\equiv 1(3)$. $(0,5pt)$

ب) بين أن $A\equiv x+y-1(11)$. $(0,5pt)$

2) حدد العدد A علما أنه يقبل القسمة على 33 و أن $x>y$. $(0,5pt)$

المسألة في التحليل $(10pts)$

الجزء الاول

لتكن f الدالة المعرفة ب $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\ln^2(x)}; x\in\,]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0)=0\end{cases}$ و C_f مبيانها في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) بين أن f متصلة على يمين 0. $(0,25pt)$

ب) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. $(0,5pt)$

2) حدد الفروع اللانهائية ل C_f. $(0,5pt)$

3) أ) أحسب $f'(x)$ لكل من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ ثم ضع جدولا لتغيرات f . $(0,75pt)$

ب) أنشئ C_f (خذ $3cm$ لوحدة القياس). $(0,5pt)$

ج) بين أن f تقابل من $]1,+\infty[$ نحو $]0,+\infty[$ و حدد صيغة $f^{-1}(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. $(0,75pt)$

الجزء الثاني

لتكن F الدالة المعرفة ب $\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt ; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ F(0)=0 \end{cases}$ و C_F مبيانها في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) بين أن $\forall x\in]0,1[; \frac{x^2-x}{\ln^2(x)}\leq F(x)\leq 0$. $(0,5pt)$

ب) استنتج أن F متصلة على يمين 0 . $(0,5pt)$

ج) أدرس قابلية اشتقاق الدالة F على يمين 0 و أعط التأويل الهندسي النتيجة المحصل عليها . $(0,5pt)$

2) أ) باستعمال مبرهنة المتوسط بين أن $\forall x\in]1,+\infty[; F(x)\geq \frac{x^2-x}{\ln^2(x^2)}$. $(0,75pt)$

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي ل C_F عند $+\infty$. $(0,5pt)$

3) أ) بين أن $\begin{cases} \forall t\in]1,+\infty[; \ln t < t-1 \\ \forall t\in \left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[; \ln t > \sqrt{2}(t-1) \end{cases}$. $(1pt)$

ب) استنتج أن $\begin{cases} \forall x\in]1,+\infty[; F(x)\geq \frac{x}{x^2-1} \\ \forall x\in \left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[; F(x)\leq \frac{x}{2(x^2-1)} \end{cases}$. $(1pt)$

ج) أحسب $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ و $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ ماذا تستنتج؟ $(0,75pt)$

4) أ) أحسب $F'(x)$ لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. $(0,5pt)$

ب) ضع جدولا لتغيرات الدالة F . $(0,25pt)$

ج) أنشئ C_F نأخذ $F(2)\simeq 1.8$. $(0,5pt)$

إنتهى