Exercice 10pts maths-inter.ma 1. التمرين

(U_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{-1+7U_n}{5-3U_n} \end{cases}$

(1 (a بين أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ فإن : $\dfrac{1}{3} - U_{n+1} = \dfrac{8(1-3U_n)}{12+3(1-3U_n)}$. 0,5pts

(b بين أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ فإن : $U_{n+1} + 1 = \dfrac{4(1+U_n)}{4+(1-3U_n)}$. 0,5pts

(c بين أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ فإن : $U_{n+1} - U_n = -\dfrac{(1+U_n)(1-3U_n)}{4+(1-3U_n)}$. 1pts

(2 (a بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 < U_n < \dfrac{1}{3}$. 1pts

(b أدرس رتابة المتتالية (U_n). 1pts

(3 نعتبر المتتالية (V_n) بحيث: $V_n = \dfrac{3U_n - 1}{U_n + 1}$.

(a بين أن (V_n) متتالية هندسية وحدد V_0. 1pts

(b بين أن $U_n = \dfrac{1-2^n}{3+2^n}$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$. 1pts

(4 نعتبر المتتالية (W_n) بحيث مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $W_n + V_n = 2n - 1$.

ونضع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

و $A_n = 1 + 2 + ... + n$

(a بين أن: $W_n = 2^n + 2n - 1$. 1pts

(b أثبت أن: $S_n = 1 - 2^{n+1}$. 1pts

(c أثبت أن: $A_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 1pts

(d استنتج المجموع $S'_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ بدلالة n. 1pts

Exercice 10pts maths-inter.ma 2. التمرين

(U_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3} \end{cases}$

(1 (a بين أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ فإن: $U_{n+1} - 5 = \dfrac{2(U_n - 5)}{U_n - 3}$. 0,5pts

(b بين أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ فإن: $U_{n+1} - U_n = -\dfrac{(U_n - 5)^2}{U_n - 3}$. 0,5pts

(2 (a بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $5 < U_n$. 1pts

(b أدرس رتابة المتتالية (U_n). 1pts

(3 نعتبر المتتالية (V_n) بحيث: $V_n = \dfrac{1}{U_n - 5}$.

(a تحقق أن $V_{n+1} = \dfrac{U_n - 3}{2(U_n - 5)}$. 1pts

(b استنتج أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{2}$. 1pts

(c بين أن $U_n = \dfrac{15n+11}{3n+1}$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$. 1pts

(4 نعتبر المتتالية (W_n) بحيث مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $W_n - V_n = 2^n - 1$.

ونضع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

و $Q_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^2$

(a بين أن: $W_n = 2^n + \dfrac{3n+1}{6} - 1$. 1pts

(b أثبت أن: $S_n = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$. 1pts

(c أثبت أن: $Q_n = 2^{n+1} - 1$. 1pts

(d استنتج المجموع $S'_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ بدلالة n. 1pts

Bonne Chance

Exercice n°: 1

$U_0 = 0$; $U_{n+1} = \dfrac{-1+7U_n}{5-3U_n}$

1°) a) on a :

$$\frac{1}{3} - U_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{-1+7U_n}{5-3U_n} = \frac{5-3U_n-3(-1+7U_n)}{3(5-3U_n)}$$

$$= \frac{8-24U_n}{3(4+1-3U_n)} = \frac{8(1-3U_n)}{12+3(1-3U_n)}$$

b) on a :

$$U_{n+1}+1 = \frac{-1+7U_n}{5-3U_n}+1 = \frac{-1+7U_n+5-3U_n}{5-3U_n}$$

$$= \frac{4+4U_n}{4+1-3U_n} = \frac{4(1+U_n)}{4+(1-3U_n)}$$

c) on a :

$$U_{n+1}-U_n = \frac{-1+7U_n}{5-3U_n} - U_n = \frac{-1+7U_n-5U_n+3U_n^2}{5-3U_n}$$

$$= \frac{3U_n^2+2U_n-1}{5-3U_n} = \frac{3U_n^2+3U_n-U_n-1}{5-3U_n}$$

$$= \frac{3U_n(U_n+1)-(U_n+1)}{4+(1-3U_n)}$$

$$= \frac{(3U_n-1)(U_n+1)}{4+(1-3U_n)} = -\frac{(1+U_n)(1-3U_n)}{4+(1-3U_n)}$$

2°) a) Montrons par Récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$; $-1 < U_n < \frac{1}{3}$

*) on a $-1 < U_0 < \frac{1}{3}$ car $U_0 = 0$

la propriété est donc vraie pour $n=0$

*) supposons que $0 < U_n < \frac{1}{3}$

d'où $-1 < -3U_n < 3$ et $-1 < U_n$

d'où $0 < 1-3U_n$ et $0 < 1+U_n$

d'où $\frac{1}{3} - U_{n+1} = \frac{8(1-3U_n)}{12+13(1-3U_n)} > 0$ d'où $U_{n+1} < \frac{1}{3}$

et $U_{n+1} + 1 = \frac{4(1+U_n)}{4+(1-3U_n)} > 0$ d'où $-1 < U_{n+1}$

ce qui fait $-1 < U_{n+1} < \frac{1}{3}$

Conclusion : D'après le principe de Récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ -1 < U_n < \frac{1}{3}$$

b) Etude de la convergence de (U_n)

on a d'après 1°) a) $U_{n+1} - U_n = -\frac{(1+U_n)(1-3U_n)}{4+(1-3U_n)}$

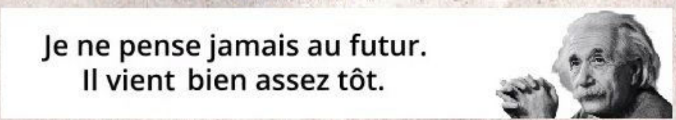
or on a d'après la question précédente

$\forall n \in \mathbb{N}$; $-1 < U_n < \frac{1}{3}$ ce qui fait

$0 < 1+U_n$ et $0 < 1-3U_n$

d'où $U_{n+1} - U_n < 0$, ce qui fait $U_{n+1} < U_n$

et la suite (U_n) est strictement décroissante.



3°/ on a $V_n = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1}$

a) nature de la suite (V_n)

on a $V_{n+1} = \frac{3U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1} = \frac{\frac{-3+21U_n}{5-3U_n} - \frac{5-3U_n}{5-3U_n}}{\frac{-1+7U_n}{5-3U_n} + \frac{5-3U_n}{5-3U_n}}$

$$= \frac{-3+21U_n-5+3U_n}{-1+7U_n+5-3U_n} = \frac{-8+24U_n}{4+4U_n}$$

$$= \frac{8}{4} \times \frac{3U_n-1}{U_n+1} = 2V_n$$

d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = -1$

b) Calcul de U_n :

on a $v_n = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1}$ d'où $U_n v_n + v_n = 3U_n - 1$

d'où $U_n(v_n - 3) = -1 - v_n$ d'où $U_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 3}$

ce qui fait $U_n = \frac{1 + v_n}{3 - v_n}$, or (v_n)

est géométrique d'où $v_n = v_0 \times q^n = -2^n$

d'où $U_n = \frac{1 - 2^n}{3 + 2^n}$

4°) a) Calcul de W_n :

on a $W_n + V_n = 2n - 1$, d'où

$W_n = -V_n + 2n - 1$ or $V_n = -2^n$

d'où $W_n = 2^n + 2n - 1$

c/ on a $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

or (V_n) est une suite géométrique

d'où $S_n = V_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = -\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$

d'où $S_n = 1 - 2^{n+1}$

d/ on a $A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

A_n est donc la somme des premiers termes d'une suite Arithmétique de raison 1 et de premier terme 1 ; d'où

$$A_n = \frac{n}{2}(1 + n) \text{ d'où } A_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e/ on a $W_n = -\vartheta_n + 2n - 1$

d'où on obtient successivement

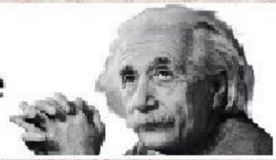
$$\begin{aligned}
W_0 &= -\vartheta_0 + 2\times 0 - 1\\
W_1 &= -\vartheta_1 + 2\times 1 - 1\\
W_2 &= -\vartheta_2 + 2\times 2 - 1\\
&\vdots\\
W_n &= -\vartheta_n + 2\times n - 1\\
\hline
S'_n &= -S_n + 2A_n - (n+1)\times 1
\end{aligned}$$

or $S_n = 1 - 2^{n+1}$ et $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$

d'où $S'_n = 2^{n+1} - 1 + n(n+1) - (n+1)$

$S'_n = 2^{n+1} - 1 + n^2 + n - n - 1$

d'où $S'_n = 2^{n+1} + n^2 - 2$



Exercice n°2 $\quad u_0 = 11 \; ; \; u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}$

1°) a) on a :

$$u_{n+1} - 5 = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} - \frac{5u_n - 15}{u_n - 3} = \frac{7u_n - 25 - 5u_n + 15}{u_n - 3}$$

$$= \frac{2u_n - 10}{u_n - 3} = \frac{2(u_n - 5)}{u_n - 3}$$

b) on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} - \frac{u_n^2 - 3u_n}{u_n - 3} = \frac{-u_n^2 + 10u_n - 25}{u_n - 3}$$

$$= -\frac{u_n^2 - 10u_n + 25}{u_n - 3} = -\frac{(u_n - 5)^2}{u_n - 3}$$

2°) a) Montrons par Récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 5 < u_n$$

*) on a $5 < u_0 = 11$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

*) supposons que $5 < u_n$

on a $u_{n+1} - 5 = \frac{2(u_n - 5)}{u_n - 3}$, d'après l'hypothèse de Récurrence on a $3 < 5 < u_n$ d'où

$$0 < u_n - 5 \quad \text{et} \quad 0 < u_n - 3$$

d'où $\quad 0 < u_{n+1} - 5$ d'où $5 < u_{n+1}$

Conclusion : d'après le principe du Raisonnement par Récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 5 < u_n$$

b) Etude de la monotonie de (u_n)

on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 5)^2}{u_n - 3}$

or, on a $3<5<U_n$ d'où $0<U_n-3$

et on a aussi $0<(U_n-5)^2$

d'où $U_{n+1}-U_n<0$ ce qui fait $U_{n+1}<U_n$

et par suite la suite (U_n) est décroissante strictement.

3°/ on a : $v_n = \dfrac{1}{U_n-5}$

a) on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}-5} = \dfrac{1}{\dfrac{7U_n-25}{U_n-3}-5}$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{U_n-3}{7U_n-25-5U_n+15} = \frac{U_n-3}{2U_n-10}$$

d'où $v_{n+1} = \dfrac{U_n-3}{2(U_n-5)}$

b) on a : $v_{n+1}-v_n = \dfrac{U_n-3}{2(U_n-5)} - \dfrac{1}{U_n-5}$

d'où

$$v_{n+1}-v_n = \frac{U_n-3-2}{2(U_n-5)} = \frac{U_n-5}{2(U_n-5)} = \frac{1}{2}$$

d'où $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}$

donc (v_n) est une suite Arithmétique de Raison $r=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0 = \dfrac{1}{U_0-5} = \dfrac{1}{11-5} = \dfrac{1}{6}$

c/ calcul de U_n :

on a : $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$ d'où $u_n - 5 = \frac{1}{v_n}$

d'où $u_n = 5 + \frac{1}{v_n}$

or (v_n) est Arithmétique d'où

$$v_n = v_0 + n.r = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}n = \frac{3n+1}{6}$$

d'où $u_n = 5 + \frac{6}{3n+1} = \frac{15n+5+6}{3n+1}$

d'où $u_n = \frac{15n+11}{3n+1}$

d) $\lim u_n$? on a $u_n = \frac{15n+11}{3n+1}$

40/a) on a : $W_n - V_n = 2^n - 1$

a) d'où $W_n = v_n + 2^n - 1$

or $v_n = \frac{3n+1}{6}$, d'où $W_n = \frac{3n+1}{6} + 2^n - 1$

ce qui fait $W_n = 2^n + \frac{3n+1}{6} - 1$

c/ (V_n) est une suite Arithmétique donc

$$S_n = V_0+V_1+\dots+V_n = \frac{n+1}{2}(V_0+V_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{3n+1}{6}\right)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\times\frac{3n+2}{6} \text{ d'où } S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

d/ on a $R_n = 2^0+2^1+2^2+\dots+2^n$

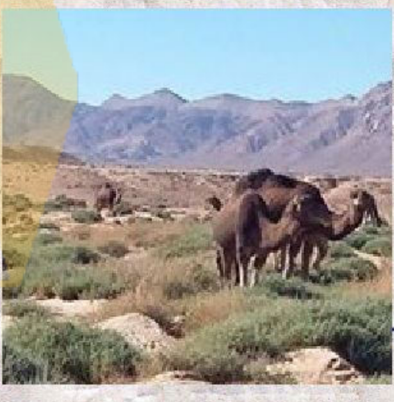
donc R_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0=1$ d'où

$$R_n = 1\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}, \text{ d'où } R_n = 2^{n+1}-1$$

e/ $S'_n = W_0+W_1+W_2+\dots+W_n$

on a $W_n = V_n+2^n-1$

d'où, on a successivement



$$\begin{aligned} W_0 &= V_0 + 2^0 - 1 \\ W_1 &= V_1 + 2^1 - 1 \\ W_2 &= V_2 + 2^2 - 1 \\ &\vdots \\ W_n &= V_n + 2^n - 1 \\ \hline S'_n &= S_n + R_n - (n+1)\times 1 \end{aligned}$$

d'où $S'_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}+2^{n+1}-1-n-1$

d'où :

$$S'_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}+2^{n+1}-n-2$$

On ne peut pas résoudre un problème avec le même niveau de pensée que celle qui l'a créé.