Exercice .1 Maths-inter 1.

Soient dans l'espace muni du r-o-n-d $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(-1,0,3)$, $B(1,-2,1)$ et $\Omega(0,-1,2)$

1) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $AM^2 + BM^2 = 24$.

a) Montrer que :
$$AM^2 + BM^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 8)$$

b) En déduire que (Γ) est la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$.

2) (Q_1) et (Q_2) sont deux plans différents et parallèles de vecteur normal $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et qui coupent la sphère suivant deux cercles (C_1) et (C_2) de rayon $r = 1$ et de centres respectifs H_1 et H_2.

a) Calculer la distance d du point Ω à chacun des plan (Q_1) et (Q_2).

b) Déterminer les équations cartésiennes de (Q_1) et (Q_2).

3) Soit (L) le cylindre de bases (C_1) et (C_2).

a) Calculer S_b la surface de la base du cylindre (L).

b) En déduire le volume V_L du cylindre (L).

4) Calculer le volume V_C du cône de sommet Ω et de base (C_1).

Exercice .2 Maths-inter 2.

Soient dans l'espace muni du r-o-n-d $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(-1,1,1)$, $B(1,0,0)$, $C(2,1,-2)$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. 0,5pts

b) En déduire S_{ABC} l'aire du triangle ABC.

c) Montrer que les points A, B et C définissent Un plan (P).

d) Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P).

3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = \frac{11}{4}$.

a) Montrer que :
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = x^2 - 3x + (y-1)^2 + z^2 + z - 4$$

b) En déduire que (Γ) est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = 6$.

4) a) Montrer que Ω appartient à (P). 0,5pts

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (Γ) suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

5) Soit la droite (D) définie par la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = 2k + 1/2 \\ y = k + 4 \\ z = 2k + 1/2 \end{cases}$; $(k \in \mathbb{R})$

a) Montrer que que la droite (D) coupe la sphère (Γ) En deux points.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (D) et (Γ).

Exercice .3 Maths-inter 3.

Soient dans l'espace muni du r-o-n-d $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(2,1,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(4,3,-3)$, $\Omega(2,0,1)$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. (P) est le plan passant par C et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) a) Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) est $x - 2y + 2z + 8 = 0$.

b) Montrer que la distance entre Ω et (P) est $d = 4$.

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P).

b) Montrer que le point d'intersection de (P) et de (Δ) est le point $H\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 24$.

a) Montrer que :
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 - 1$$

b) En déduire que (Γ) est la sphère de centre $\Omega(2,0,1)$ et de rayon $R = 5$.

4) a) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (Γ) suivant un cercle (C) dont on déterminera le rayon.

b) Déterminer du centre H du cercle (C).

Voir les Solutions en bas