Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout nombre complexe $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose : $M(z)=\begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E=\{M(z)/z\in\mathbb{C}\}$

1) On définit sur E la loi de composition interne "$*$" par :
$(\forall z\in\mathbb{C})(\forall z'\in\mathbb{C})$; $M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$
Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
$(\forall z\in\mathbb{C})$; $\varphi(z)=M(z)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$
 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$ et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.
 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif .

3) En déduire que $(E,*,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

2) Vérifier que :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2)$; $M(x,y)TM(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$

3) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $\varphi(x+iy)=M(x,y)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$
 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.
 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.

4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5) a) Calculer $A\times M(x,y)$ pour tout $M(x,y)$ de E.
 b) En déduire que tout élément de E n'admet pas de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss2

Partie : I l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une loi de composition interne "$*$" définie par :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2) \quad ; \quad x*y=x+y-e^{xy}+1$$

1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.
 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

2) Sachant que l'équation : $(E): \; 3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions distincts dans $\mathbb{R}$,
Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie : II On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

2) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers F définie par :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2) \; ; \; \varphi(x+iy)=M(x,y)$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

b) On pose $F^*=F-\{0\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) En déduire que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

pour tout $x\in\mathbb{R}$ on pose : $M(x)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$

E est muni de la loi de composition interne "T" définie par :
$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}) \; ; \; M(x)TM(y)=M(x+y+1)$

1) On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ vers E définie par :
$(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; \varphi(x)=M(x-1)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T).

b) En déduire que (E,T) est un groupe commutatif .

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}) \; ; \; M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$

b) En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi "$\times$" est commutative dans E.

c) Montrer que la loi "$\times$" est distributive par rapport à la loi "T" dans E.

d) Montrer que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que la matrice identique I est neutre dans $(E,\times)$.

3) a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}) \; ; \; M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I$

b) Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

Bon Courage