Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

On pose $J =]-1,1[$

Partie : I Soient a et b deux éléments de l'intervalle J, on pose : $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

1) Vérifier que $\left(\forall (a,b) \in J^2\right)$; $1+ab>0$, en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans J.
2) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans J.
   b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans J qu'on déterminera.
   c) Montrer que $(J, *)$ est un groupe commutatif.

Partie : II On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) == \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J
2) Soit g la bijection réciproque de l'application f (la détermination de g n'est pas demandé)
   Quel que soient x et y de J, on pose : $x \perp y = f\left(g(x) \times g(y)\right)$
   Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(J^*, \perp)$ tel que $J^* = J - \{0\}$.
3) On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans J.
   Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E = \left\{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}), +)$
2) On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2 = J \times J$ en déduire que E n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.
3) On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne "$*$" par :
   $$\left(\forall A \in M_2(\mathbb{R})\right)\left(\forall B \in M_2(\mathbb{R})\right) \;;\quad A * B = A \times N \times B \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   et soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :
   $$\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\right) \;;\quad \varphi(a+ib) = M(a,b)$$
   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}), *)$
   b) On pose $E^* = E - \{0\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$
   c) En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.
4) Montrer que $\left(\forall (A,B,C) \in E^3\right)$; $A * (B+C) = A * B + A * C$
5) Montrer que $(E, +, *)$ est un corps commutatif.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Les parties I et II sont indépendants.

Partie : I Pour tous x et y éléments de $G =]1,2[$, on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{G}$.

2) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif

et on considère l'application $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbf{G}$ tel que : $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$

a) Montrer que $\mathbf{f}$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(\mathbf{G},*)$.

b) Montrer que $(\mathbf{G},*)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

Partie : II On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$ et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel·

On pose $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $M(x,y)=xI+yA$.

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) a) Vérifier que $A^3=0$, en déduire que $\mathbf{A}$ est un diviseur de zéro dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

b) Vérifier que $(A^2-A+I)(A+I)=I$

En déduire que la matrice $(A+I)$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$ qu'on déterminera.

2) Démontrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel et donner une base de cet espace.

Exercice .4

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre·

1) On définit dans $\mathbb{Z}$ la loi de composition interne $"*"$ par : $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)$; $x*y=x+y-2$

a) Montrer que la loi $"*"$ est commutative et associative·

b) Montrer que la loi $"*"$ admet un élément neutre qu'on déterminera·

c) Montrer que la loi $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2) On définit dans $\mathbb{Z}$ la loi de composition interne $"T"$ par : $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)$; $xTy=xy-2x-2y+6$

et on considère l'application $\mathbf{f}$ définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall x\in\mathbb{Z}$; $f(x)=x+2$

a) Montrer que l'application $\mathbf{f}$ est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},T)$.

b) Montrer que : $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3)$; $(x+y)Tz=(xTz)+(yTz)$.

3) En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,T)$ est un anneau commutatif unitaire.

4) a) Montrer que : $xTy=2 \iff (x=2 \text{ ou } x=3)$.

b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est intègre.

c) l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est-il un corps ? justifier la réponse.

Bon Courage