Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Les parties **I** et **II** sont indépendants.

Partie : I Pour tous a et b éléments de $I=[1,+\infty[$, on pose : $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{a}-1\right)^2$

1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans I.
2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative dans I.
3) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre dans I qu'on déterminera.

Partie : II On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.
2) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}^*$ dans E par : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ ;\quad \varphi(x)=M(x)$
   a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R}^*,\times)$ dans $(E,\times)$.
   b) En déduire la structure de $(E,\times)$.
   c) On pose $H=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n\in\mathbb{Z}\right\}$, Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(E,\times)$.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

Partie : I On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On pose $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer : $I-A$ et A^2.
2) En déduire que la matrice A admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$ qu'on déterminera.

Partie : II Pour tous a et b éléments de $I=]1,+\infty[$, on pose : $a*b=\left(\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}\right)^2$

1) Vérifier que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\quad x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$.
2) Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne dans I.
3) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ est un groupe commutatif.
3) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans I par : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\quad \varphi(x)=\sqrt{x+1}$
   a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(I,*)$.
   b) En déduire la structure de $(I,*)$.
4) On pose $H=\left\{\sqrt{1+2^m} / m\in\mathbb{Z}\right\}$, Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(I,*)$.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Pour tout éléments x et y de l'intervalle $I=]0,1[$, on pose : $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

1) a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I.
   b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I.
   c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans I qu'on déterminera.

d) Montrer que $(I\,,\,*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère les deux ensembles : $H=\left\{2^n/n\in Z\right\}$ et $K=\left\{\dfrac{1}{2^n+1}/n\in Z\right\}$

a) Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{R}_+^*\,,\times)$.

b) On considère l'application φ définie de H dans I par : $f(x)==\dfrac{1}{x+1}$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(H,\times)$ vers $(I,*)$.
En déduire que $(K,*)$ est un sous-groupe de $(I,*)$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss1

Les parties I et II sont indépendants.

Partie : I On rappelle que $(M_3(\mathbb{R})\,,+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On pose $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose : $A^0=I$, $A^1=A$, $A^2=A\times A$, en général $A^{n+1}=A^n\times A$.

1) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}\quad;\quad A^{2k}=I$

2) Montrer que la matrice A admet un inverse A^{-1} qu'on déterminera.

Partie : II Soit α un nombre réel strictement positif.

1) Pour tout x et y de l'intervalle $I=\left]\alpha,+\infty\right[$, on pose : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I.
b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I.
c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans I qu'on déterminera.
d) Montrer que $(I\,,\,*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère l'application φ définie de I dans $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x\in I\ ;\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{x-\alpha}$

a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(I\,,*)$ dans $(\mathbb{R}_+^*\,,\times)$.

b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ avec $x^{(3)}=x*x*x$

Bon Courage