Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$.

On pose pour tout x réel, $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ x^2 & 2x & 1\end{pmatrix}$, soit l'ensemble: $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$.

1) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
2) a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par $\varphi(x)=M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.
   b) Montrer que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.
   c) Déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de $M(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.
3) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5X=B$ avec $A=M(2)$ et $B=M(12)$
4) Soit l'ensemble $F=\{M(\ln x)/x\in\mathbb{R}_+^*\}$. Montrer que est un sous-groupe de $(E,\times)$.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss1

Les parties I et II sont indépendants.

Partie : I l'ensemble $I=]0,+\infty[$ est muni de la loi $*$ telle que : $(\forall(a,b)\in I^2)$; $a*b=e^{\ln(a)\ln(b)}$

1) Montrer que $*$ est commutative et associative dans I.
2) Montrer que $*$ admet un élément neutre dans I, qu'on déterminera.
3) a) Montrer que $(I-\{1\},*)$ est un groupe commutatif.
   b) Montrer que $J=]1,+\infty[$ est un sous-groupe du groupe $(I-\{1\},*)$.
4) l'ensemble $I=]0,+\infty[$ est muni de la loi $\times$. ($\times$ est le produit des nombres sur $\mathbb{R}$)
   a) Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.
   b) Montrer que la loi $*$ est un corps commutatif.

Partie : II On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et A^3.
2) En déduire que la matrice A n'a pas de matrice inverse.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss2

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$, et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels a et b, $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ 4b & a\end{pmatrix}$, soit l'ensemble: $V=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ et déterminer une base de V.
2) a) Montrer que V est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que $(V,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3) a) Calculer $M(\frac{1}{2},\frac{-1}{4})\times M(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
   b) l'anneau $(V,+,\times)$ est-il un corps ?

4) Soit $\mathbf{X}$ une matrice de $\mathbf{V}$ telle que $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{4b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ avec $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in \mathbb{R}^2$

a) Montrer que $\mathbf{X}^2-2\mathbf{a}\mathbf{X}+(\mathbf{a}^2-4\mathbf{b}^2)\mathbf{I}=\mathbf{0}$.

b) On suppose que $\mathbf{a}^2-4\mathbf{b}^2\neq 0$
Montrer que $\mathbf{X}$ admet un inverse dans $\mathbf{V}$ qu'on déterminera.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

On rappelle que $(\mathbf{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$.

On pose pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$: $\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/x} \end{pmatrix}$.

Soit l'ensemble: $\mathbf{F}=\left\{\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})/(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}$.

1) a) Montrer que $\mathbf{F}$ est une partie stable de $(\mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que $(\mathbf{F},\times)$ est un groupe non commutatif .

2) Soit $\mathbf{G}$ l'ensemble des matrices $\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{0})$ de $\mathbf{F}$ tel que $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^*$
Montrer que $(\mathbf{G},\times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbf{F},\times)$.

3) Soit $\mathbf{E}=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathbf{E}$ est muni d'une loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{E})(\forall(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbf{E}) \quad ; \quad (\mathbf{x},\mathbf{y})\perp(\mathbf{a},\mathbf{b})=\left(\mathbf{ax},\mathbf{bx}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{a}}\right)$$

On considère l'application φ de $(\mathbf{F},\times)$ vers $(\mathbf{E},\perp)$ définie par : $\varphi(\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}))=(\mathbf{x},\mathbf{y})$

a) Calculer : $(1,1)\perp(2,3)$ et $(2,3)\perp(1,1)$.

b) Montrer que φ est isomorphisme.

c) En déduire la structure de $(\mathbf{E},\perp)$.

Exercice .5 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss2

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne $*$ définie par : $\mathbf{x}*\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{y}-3\mathbf{xy}$

1) a) Vérifier que : $(\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^2)$; $(1-3\mathbf{x})(1-3\mathbf{x})=1-3(\mathbf{x}*\mathbf{y})$

b) Montrer que $(\mathbb{R}-\{1/3\},*)$ est un groupe commutatif.

2) a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par $\varphi(\mathbf{x})=1-3\mathbf{x}$
est un isomorphisme de $(\mathbb{R}-\{1/3\},*)$ vers $(\mathbb{R}^*,\times)$.

b) Montrer que $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)=\left]-\infty,1/3\right[$ vers est un groupe commutatif.

c) Montrer que $\left(\left]-\infty,1/3\right[,*\right)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}-\{1/3\},*)$.

3) Pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}-\{1/3\}$ et pour tout $\mathbf{n}$ de $\mathbb{N}$ on pose : $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{0}$ et $(\forall\mathbf{n}\in\mathbb{N})$; $\mathbf{x}^{(\mathbf{n}+1)}=\mathbf{x}^{(\mathbf{n})}*\mathbf{x}$

a) Montrer que : $(\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}-\{1/3\})(\forall\mathbf{n}\in\mathbb{N})$; $\varphi\left(\mathbf{x}^{(\mathbf{n})}\right)=(\varphi(\mathbf{x}))^{\mathbf{n}}$

b) En déduire $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})}$ en fonction de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{n}$.

4) L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne $\mathbf{T}$ définie par : $\mathbf{x}*\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{y}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

a) Montrer que $(\mathbb{R},\mathbf{T})$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $(\mathbb{R},\mathbf{T},*)$ est un corps commutatif.

Bon Courage