Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$. Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{3}\\ -b/\sqrt{3} & a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
   b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel E.
2) On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :
   $(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)$; $\varphi(a+ib)=M(a,b)$
   a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$
3) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.
4) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $J\times x^3=I$ avec $x^3=x\times x\times x$

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. On pose $I=M(1,0)$, $J=M(0,1)$ et $0=M(0,0)$

1) a) Montrer que $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.
   b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(F,+,\cdot)$, en déduire sa dimension.
2) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3) Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. Montrer que $(1,\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C},+,\cdot)$ réel.
4) Soit ψ l'application de $\mathbb{C}$ vers F définie par :
   $(\forall(m,n)\in\mathbb{R}^2)$; $\psi(m+in)=M(m,n)=\begin{pmatrix}m+n & -n\\ 5n & m-3n\end{pmatrix}$
   a) Vérifier que $J^2=-2(I+J)$ et $\psi(\alpha)=J$
   b) Déterminer les deux valeurs de α pour lesquelles l'application ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(F,\times)$
   c) On prend $\alpha=-1+i$. Ecrire la matrice J^{2007} dans la base Montrer que $J^2=-2(I+J)$.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

Partie : I Soit l'ensemble $E=\mathbb{R}-\{1/\sqrt{2}\}$. On pose pour tout couple (a,b) de E : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

1) a) Montrer que pour tout couple (a,b) de E : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

b) Montrer que la loi $\perp$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que $(E,\perp)$ est un groupe commutatif.

Partie : II On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $a \in E$, on pose $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$

1) a) On pose : $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$. vérifier que $A^2 = -2A$ et que $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$

b) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) Soit φ l'application de $(E,\perp)$ vers $(F,\times)$ définie par :

$(\forall a \in E) \quad ; \quad \varphi(a) = M(a)$

a) Montrer que φ est un isomorphisme .

b) En déduire la structure de $(F,\times)$.

Bon Courage