Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soient les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan tels que les points O, M_1 et M_2 sont non alignés et deux à deux distincts et $M(z)$ le point d'affixe z vérifiant la relation : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$

b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2.

2) Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$, alors le point M appartient à l'axe des réels.

3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation R de centre O et d'angle $\alpha\in]0,\pi[$.

a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α.

b) En déduire que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0,\pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $t\in C$; $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$.

a) Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que : $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

b) Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe z en fonction de θ.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss2

On considère dans complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 l'imaginaire pur)

c) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

a) Déterminer le nombre complexe e l'affixe du point E, milieu du segment $[AB]$.

b) Soit R la rotation de centre A d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, on pose $R(E)=C$. Montrer que : $z_C=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

c) Soit D le point d'affixe $d=1+\dfrac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\dfrac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(3-i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Déterminer a et b les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (sachant que $b\in\mathbb{R}$)

c) Vérifier que $b=(1-i\sqrt{3})a$.

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectifs a et b .

a) Déterminer le nombre complexe b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation R de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que $\mathbf{B}$ est l'image de $\mathbf{B_1}$ par l'homothétie de centre $\mathbf{A}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

c) Soit $\mathbf{C}$ un point, d'affixe $\mathbf{c}$, appartenant au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{OAB}$ et différent de et de $\mathbf{O}$ et de $\mathbf{A}$. Déterminer l'argument du nombre complexe $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{c-a}}$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

Partie I :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{z^2+i=0}$ ($\mathbf{a}$ est la solution de l'équation telle que $\mathbf{Re(a)>0}$)

2) a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1+a}$

b) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Vérifier que $\mathbf{(1+a)(1-a)=1+i}$, en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $\mathbf{1-a}$.

Partie II :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M'}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}$, $\mathbf{-a}$, $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z'}$ tels que $\mathbf{zz'+i=0}$.

1) Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\overline{\mathbf{z}}$, conjugué de $\mathbf{z}$. Montrer que les droites $\mathbf{(ON)}$ et $\mathbf{(OM')}$ sont perpendiculaires.

2) a) Montrer que : $\mathbf{z'-a=i\dfrac{z-a}{az}}$. b) Montrer que si $\mathbf{z\neq -a}$, alors : $\mathbf{z'\neq -a}$ et $\dfrac{\mathbf{z'-a}}{\mathbf{z'+a}}=-\dfrac{\mathbf{z-a}}{\mathbf{z+a}}$.

3) On suppose que les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ sont non alignés.
Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss1

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit θ un nombre réel tel que $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[-\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathbf{(E)}$ d'inconnue $\mathbf{z}$ suivante : $\mathbf{(E)}$: $\mathbf{z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0}$

a) Vérifier que $\Delta=(i\sqrt{2}e^{i\theta})^2$ est le discriminant de l'équation $\mathbf{(E)}$

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$ de l'équation $\mathbf{(E)}$ dans $\mathbb{C}$.

2) On considère les points $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ et $\mathbf{A}$ d'affixes respectifs $\mathbf{1}$, $\mathbf{-1}$, $e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$, $e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

a) Montrer que les droites $\mathbf{(OA)}$ et $\mathbf{(T_1T_2)}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\mathbf{K}$ le milieu du segment $\mathbf{[T_1T_2]}$, montrer que les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{A}$ sont alignés.

c) En déduire que la droite $\mathbf{(OA)}$ est la médiatrice du segment $\mathbf{[T_1T_2]}$.

3) Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre $\mathbf{T_1}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Donner l'expression complexe de la rotation $\mathbf{R}$.

b) Vérifier que l'affixe du point $\mathbf{B}$ image du point $\mathbf{I}$ par la rotation $\mathbf{R}$ est : $\mathbf{b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i}$

c) Montrer que les droites $\mathbf{(IJ)}$ et $\mathbf{(AB)}$ sont perpendiculaires.

4) Déterminer l'affixe du point $\mathbf{C}$ l'image du point $\mathbf{A}$ par la translation de vecteur $-\vec{v}$.

5) Montrer que le point $\mathbf{A}$ est le milieu du segment $\mathbf{[BC]}$.

Bon Courage