Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Partie I : Soit a un nombre complexe différent de 1.
On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : \ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

1) Montrer que $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ sont les solutions de l'équation (E).

2) On pose : $a = e^{i\theta}$ tel que $0 < a < \pi$

a) Montrer que $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$

b) En déduire la forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2.

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On suppose que $\mathrm{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$.

1) Déterminer les affixes de chacun des points J et K milieux respectifs des segment $[AC]$ et $[AB]$ en fonction de a.

2) Soit R_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On pose : $C' = R_1(C)$ et $A' = R_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'.
Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$.

3) Calculer $\left(\dfrac{a' - c'}{a-1}\right)$ en déduire que la droite (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

Partie I : Soit a un nombre complexe non nul.
On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : \quad 2z^2 - \left(3 + i\sqrt{3}\right)az + \left(1 + i\sqrt{3}\right)a^2 = 0$$

1) Vérifier que $\Delta = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2 a^2$ est le discriminant de l'équation (E)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On considère les points A, B et M d'affixes respectifs a, $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ et z.

Soit R la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On pose : $A_1 = R^{-1}(A)$ et $A_1 = R^{-1}(A)$

soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1.

1) Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

2) a) Montrer que : $a_1 = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $a_2 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme..

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Les deux parties I et II sont indépendantes.
le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

1) Vérifier que le nombre $z_1=1+\frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)

2) Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2=3z_1$

Partie II : On considère trois points deux à deux distincts A, B et Ω d'affixes respectifs a, b et ω.

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $P=R(A)$ et $B=R(Q)$

soient p et q les affixes respectifs de P et Q.

1) a) Montrer que : $p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$.

b) Montrer que : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

c) Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b}=\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

2) On suppose que : $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a) Montrer que est un $APQR$ parallélogramme.

b) Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, en déduire que $APQR$ est un rectangle.

Exercice .4

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

Les deux parties I et II sont indépendantes.

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$, où a est un complexe non nul.

1) Déterminer z_1 et z_2 solutions de l'équation (E).

2) a) vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

b) Montrer que : (z_1z_2 est un réel) $\Longleftrightarrow$ $\arg(a)=\dfrac{-3\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Partie II : Soit c un nombre complexe non nul et c un nombre complexe non nul.

1) On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs : 1, $(1+i)$, c, ic et z.

a) Montrer que : (A, D et M sont alignés) $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$

b) Montrer que : $(AD)\perp(OM)$ $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

2) Soit h l'affixe du point H la projection orthogonale du point O sur la droite (AD)

a) Montrer que : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$

b) En déduire que : $(BH)\perp(CH)$

Bon Courage