Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$

1) Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E)

2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$(\forall z\in C) : \quad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$

a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(5-12i)$

b) Résoudre dans l'équation (E).

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points deux à deux A , B et C d'affixes respectifs $a=-1+3i$, $b=-2i$ et $c=2+i$.

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet C.

2) Soit R_1 la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan d'affixe z On pose : $M_1=R_1(M)$ et $M_2=R_2(M)$.

a) Vérifier que l'expression analytique de la rotation R_1 est : $z_1=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$.

b) Déterminer z_2 affixe de M_1 en fonction de z.

c) En déduire que I, milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss1

Les deux parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_m) : z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$

1) Vérifier que $z_1=2-m$ est une solution de l'équation (E_m).

2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m).

a) Montrer que : $(z_1z_2=1 \iff im^2+2(1-i)-3=0)$

b) Déterminer la valeur de m tel que $z_1z_2=1$

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application δ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=-z+2$.

Soit la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega=1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et z'' l'affixe du point M'' image du point M par la rotation R.

1) a) Montrer que l'application δ est la symétrie centrale de centre le point K d'affixe 1.

b) Montrer que $z''=iz+2$.

2) On suppose que le point M est distinct du point O, origine du repère et soit A le point d'affixe 2.

a) Calculer $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points A, Ω, M' et M'' soient cocycliques.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que le nombre $a=1+i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire $\mathbf{b}$ la deuxième solution de l'équation $(\mathbf{E})$.

2) a) Montrer que $\mathbf{a}^2 = 4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$. b) Ecrire $\mathbf{a}$ sous forme trigonométrique.

3) On considère les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c} = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.
Soit le cercle (Γ) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

a) Déterminer ω l'affixe du point Ω, centre du cercle (Γ).

b) Montrer que $\mathbf{O}$ et $\mathbf{C}$ sont deux points du cercle (Γ).

c) Montrer que le complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss1

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1) a) Déterminer les racines carrées du complexe $3+4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\mathbf{E}) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

2) Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ les deux solutions de l'équation $(\mathbf{E})$ tel que $\operatorname{Re}(a) = 0$ et soient les deux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

a) Vérifier que : $\dfrac{b}{a} = 1 - i$

b) En déduire que le triangle $\mathbf{AOB}$ est isocèle rectangle en $\mathbf{A}$.

3) Soit $\mathbf{C}$ un point d'affixe $\mathbf{c}$ différent de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ l'image du point $\mathbf{B}$ par la rotation de centre $\mathbf{C}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Soit $\mathbf{K}$ l'image du point $\mathbf{D}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

a) Déterminer $\mathbf{c}$ en fonction du nombre complexe $\mathbf{d}$ affixe du point A.

b) Déterminer en fonction de $\mathbf{c}$ le nombre complexe $\mathbf{k}$ affixe du point $\mathbf{K}$.

c) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{k-c}{a-c}$, en déduire la nature du triangle $\mathbf{ACK}$.

Exercice .5 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit $\mathbf{u}$ un nombre complexe différent de $(1-i)$

1) a) Développer $(iu-1-i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $\mathbf{z}$: $(\mathbf{E}) : z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$

2) Soient les points $A\left((1+i)u-2i\right)$, $B\left((1-i)u+2\right)$, $U(u)$ et $\Omega(2-2i)$.

a) Déterminer $\mathbf{k}$ l'affixe du point $\mathbf{K}$ milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation qui transforme $\mathbf{U}$ en $\mathbf{K}$.

b) Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que : $R(A) = B$.

c) En déduire que les droites (ΩA) et (AB) sont perpendiculaires.

d) A partir du point $\mathbf{U}$ expliquer une méthode de construction des points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

3) On pose $u = (1+i)a - 2i$ tel que $a \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs en $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de $\mathbf{a}$.

b) En déduire que les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{U}$ sont alignés.

Bon Courage