Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

Soit $\mathbf{m}$ un nombre complexe différent de 1.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue $\mathbf{z}$:

$$(E_m): \quad z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=\left[(1+i)(m-1)\right]^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Résoudre l'équation (E_m).

c) Déterminer les deux valeurs de $\mathbf{m}$ sous forme algébrique pour que le produit des solutions de l'équation (E_m) soit égal à $\mathbf{1}$.

2) On pose $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

Dans le cas $m=e^{i\theta}$ et $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs m, $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

2) a) Démontrer que la transformation R qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que : $z'=1-iz$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

b) Démontrer que le nombre $\dfrac{z_2-z_1}{z_2-m}$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère l'application $\mathbf{r}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que : $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Et l'application $\mathbf{h}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2=-2z+3i$. On pose : $F=hor$

1) Déterminer la nature de chacune des applications $\mathbf{r}$ et $\mathbf{h}$.

2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ tel que $\mathbf{a}$ est un complexe donné différent de $\mathbf{i}$.

On pose : $B=F(A)$, $C=F(B)$ et $D=F(C)$.

a) Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application F alors $z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$.

b) Vérifier que Ω est le seul point vérifiant $F(\Omega)=\Omega$

3) a) Déterminer en fonction du nombre complexe $\mathbf{a}$, les nombres complexes $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ affixes respectifs des points B, C et D.

b) Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.

c) Montrer que le point Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

d) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartienne à l'axe des réels (des abscisses).

Bon Courage

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

Soit $\mathbf{a}$ un nombre complexe non nul et $\overline{\mathbf{a}}$ son conjugué.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) d'inconnue $\mathbf{z}$:

$$(E_a): \quad iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_a)

b) Résoudre l'équation (E_a).

2) Montrer que $\mathbf{a}$ est solution de l'équation (E_a) si et seulement si $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On suppose que $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, $i\overline{a}$ et $(1+ia)$.

1) On pose : $z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$.

a) Vérifier que : $\overline{z}=\dfrac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

b) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$

2) On suppose dans cette question que $\mathrm{Im}(a)\neq\dfrac{1}{2}$.

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$. Soit E le milieu de $[BC]$.

a) Déterminer b' et c' les affixes respectifs des points B' et C'.

b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ et que $B'C'=2AE$.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère l'ensemble $(H)=\left\{M(z)\in(P)\ /\ z^2+\overline{z}^2-|z|^2=1\right\}$

1) a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (H).

b) Montrer que (H) est une hyperbole et déterminer son centre, ses sommets et ses asymptotes dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

c) Construire (H).

2) $M(a)$ et $M(b)$ sont deux points de (H). On pose $\varphi(a,b)=a\overline{b}+\overline{a}b-\overline{ab}$

a) Montrer que $M(\varphi(a,b))\in(H)$

b) Montrer que $\varphi(a,1)=1$ et que $\varphi(a,\overline{a})=1$

3) L'ensemble est muni de la loi de composition interne $(*)$ telle que pour tout $M(a)$ et $M(b)$ de (H) :
$M(a)*M(a)=M(\varphi(a,b))$. Montrer que $((H),*)$ est un groupe commutatif.

Bon Courage

Soit $\mathbf{a}$ un nombre complexe non nul.

Partie I :

1) a) Vérifier que le nombre $\mathbf{u = a + i}$ est une solution de l'équation :

$$\mathbf{(E) : \ z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0}$$

b) Déterminer $\mathbf{v}$ la deuxième solution de l'équation $\mathbf{(E)}$.

2) On suppose que $|\mathbf{a}| = \mathbf{1}$.

a) Montrer que : $\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $\mathbf{u^2 = a\left[(a - \bar{a}) + 2i\right]}$

c) En déduire que : $\mathbf{\arg(u) = \arg(a) + \dfrac{\pi}{4}[\pi]}$

3) Montrer que : $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq \mathbf{2}$

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\right)$.

Soit $\mathbf{m}$ un nombre réel strictement plus grand que $\mathbf{2}$. $\mathbf{(E_m)}$ est l'ensemble des points $\mathbf{M(a)}$ du plan complexe tel que : $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = \mathbf{m}$

1) Montrer que l'ensemble est ellipse de centre $\mathbf{O}$ origine du repère.

2) On pose : $\mathbf{a = x + iy}$ où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux nombres réels.

a) Montrer que l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathbf{(E_m)}$ est : $\mathbf{x^2 + \left(1 - \dfrac{4}{m^2}\right)y^2 = \dfrac{m^2}{4} - 1}$

b) Construire l'ellipse $\mathbf{(E_4)}$.

c) Soient les points $\mathbf{A\left(\sqrt{3}\right)}$ et $\mathbf{B(2i)}$ sommets de l'ellipse $\mathbf{(E_4)}$. Montrer que la droite $\mathbf{(AB)}$ est tangente à l'ellipse $\left(\mathbf{E}_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

Bon Courage