Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss2 (Réctifié)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

On admet que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Soit la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=f(x)-x$

1) a) Vérifier que $h(0)=1$

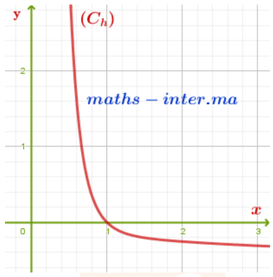
b) sur la figure ci-contre (C_h) est la courbe de la fonction h.

Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

En déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$, $f(x)\le x$

2) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; $n\in\mathbb{N}$



a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_n\le e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1 (Réctifié)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$ et la suite (U_n) telle que : $U_0=1/2$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=f(U_n)$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

1) On pose $d(x)=f(x)-x$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=x$.

b) Etudier le signe de $d(x)$.

en déduire que:

$(\forall x\in[0,1])$; $f(x)\le x$

2) a) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le U_n\le 1$.

b) Montrer que (U_n) est strictement décroissante, en déduire que (U_n) est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss2

Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0=17 \quad ; (\forall n\in\mathbb{N}) ;\ U_{n+1}=\frac{1}{4}U_n+12$$

3) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $16<U_n$.

b) Montrer que (U_n) est strictement décroissante, en déduire que (U_n) est convergente.

On considère la suite (V_n) telle que $V_n=U_n-16$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire $U_n=16+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier n, puis calculer la limite de la suite (U_n).

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $U_n<16{,}0001$.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss1 (Rectifié)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+(1-\frac{2}{x})\ln x$. Soit la suite (U_n) telle que : $U_0=1/2$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=f(U_n)$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

1) On pose $d(x)=f(x)-x$.

a) Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $]0,+\infty[$.

b) Etudier le signe de $d(x)$, en déduire que: $(\forall x\in[1,2])$; $f(x)\le x$

2) a) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1\le U_n\le 2$.

b) Montrer que (U_n) est strictement décroissante, en déduire que (U_n) est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

Bonne Chance