Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss1 Version A (Rectifié)

Soitent la fonction f définie sur $]0\ ,\ e[$ par :

$f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$, la fonction g est définie sur $]0,+\infty[$ par la courbe ci-contre (fig :1) et la suite (U_n) est telle que :

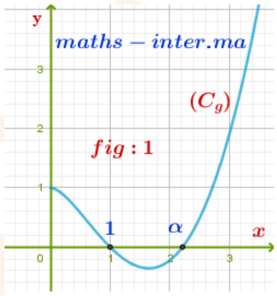
$$U_0=2 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ U_{n+1}=f(U_n)$$

α est un réel tel que $2{,}2<\alpha<2{,}3$ et $g(\alpha)=0$.

On admet que :

$$(\forall x\in]0,\ e[)\ ;\ f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

1) a) Montrer que f est bien définie sur $]0\ ,\ e[$.
   b) Résoudre graphiquement l'équ. $f(x)=x$
   c) Etudier le signe de $f(x)-x$ sur $]0\ ,\ e[$.
   d) En déduire que $(\forall x\in[1,\ \alpha])\ ;\ f(x)\le x$
2) Etudier la monotonie de (U_n).
3) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$
   b) en déduire que f est croissante sur $[1,\alpha]$
   c) Montrer par Récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;1\le U_n\le\alpha$



4) Montrer que (U_n) est convergente.
5) Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac 2014 – Ss2

Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_1=5\quad ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ U_{n+1}=\dfrac{5U_n-4}{1+U_n}$$

1) Démontrer par récurrence que :
$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ U_n>3$$
2) Soit la suite numérique (V_n) définie par :
$$V_n=\dfrac{3}{U_n-2}.$$
   a) Montrer que $V_n=\dfrac{1+U_n}{U_n-2}$, en déduire que (V_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$.
   b) Ecrire en V_n fonction de n , en déduire que :
$$U_n=2+\dfrac{3}{n}$$
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac 2014 – Ss1

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0=13\quad ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2}U_n+7$$

1) Montrer par récurrence que :
$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ U_n<14$$
2) On considère la suite (V_n) telle que pour tout entier naturel n : $V_n=14-U_n$,
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et donner V_n en fonction de n.
   b) Montrer que : $U_n=14-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $U_n>13{,}99$.

Bonne Chance