Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$ $(x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,5 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pts

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0 , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pts

b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$. 0,75 pts

c) Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$, en déduire que : $\forall x\in]0,1]$; $0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le\left(\frac{4}{e}\right)^2$. 1 pts

d) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 0,5 pts

3) Pour tout $x\ge0$, on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\ge0$. En déduire les variations de F sur $[0,+\infty[$. 1 pts

4) a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $I(x)=\int_x^1\sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x>0$. 0,75 pts

b) Montrer que pour tout $x>0$: $F(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\frac{8}{9}x\sqrt{x}(\ln x)-\frac{16}{27}x\sqrt{x}+\frac{16}{27}$ 0,75 pts

c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=1$ et $y=0$. 1 pts

5) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$

a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est bornée et strictement croissante. 1 pts

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,25 pts

Bon Courage