Partie :I

1) a) Montrer que: $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ;\ \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x-\ln(1+x)$. 0,5 pts

b) On pose $u^2 = t$ Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ;\ \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{t}{1+\sqrt{u}}du$. 0,5 pts

c) En déduire que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ;\ \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ 0,5 pts

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. 0,25 pts

Partie :II

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)\ ;\ (x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,25 pts

b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pts

2) a) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis vérifier que : $f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ 0,75 pts

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

c) Vérifier que : $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$ 0,5 pts

3) Construire la courbe (C_f) et la demi-tangente à droite au point 0 dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 0,5 pts

Partie :II

1) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$

a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ;\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 0,5 pts

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$. 0,5 pts

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

2) Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$.

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par: $U_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ U_n > 0$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. 0,5 pts

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$. 0,5 pts

d) En déduire que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge vers a . 0,25 pts

Bon Courage