Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{\operatorname{Arc}\tan(x)}{x}$; $(x>0)$

1) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I. 0,5 pts

2) a) Soit x un élément de l'intervalle I, montrer que : $(\forall x\in[0,1])$; $\dfrac{1}{1+x^2}\le\dfrac{1}{1+t^2}\le 1$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x\in[0,+\infty[)$; $\dfrac{x}{1+x^2}\le \arctan(x)\le x$ 0,5 pts

c) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0. 0,75 pts

3) a) Sachant que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I. 0,25 pts

Partie :II

1) Soit la fonction g définie sur $I=[0,+\infty[$ par : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $g(0)=1$

a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f(x)\le g(x)\le 1$. 0,5 pts

b) En déduire que g est dérivable à droite en 0. 0,75 pts

2) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $g'(x)=\dfrac{1}{x}(f(x)-g(x))$. 0,75 pts

3) Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)dt=0$ (On rappelle que $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $0<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$) 0,75 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 0,5 pts

Partie :III

1) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,1[$. 0,75 pts

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in[0,+\infty[)$; $0\le 1-f(x)\le\dfrac{x^2}{1+x^2}$ (Voir la question I) 2) b)) 0,5 pts

b) Montrer que: $(\forall x\in[0,+\infty[)$; $|g'(x)|\le\dfrac{1}{2}$ 0,75 pts

3) Soit la suite $(U_n)_{n\ge0}$ définie par: $U_0\in\mathbb{R}^+$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=g(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$. 0,75 pts

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\ge0}$ est convergente. 0,75 pts

Bon Courage