Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$; $(x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,25 pts
   b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts
   c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. 0,5 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter analytiquement le résultat obtenu. 0,5 pts
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f . 0,25 pts

3) a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion A qu'on déterminera. 0,75 pts
   b) Tracer la courbe (C_f) (On prendra $f(1)\approx 0{,}7$ et $4e^{-3}\approx 0{,}2$) 0,5 pts

Partie :II

Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$.

1) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-1}-xe^{-\frac{1}{x}}-\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$ 0,5 pts

   b) Déterminer : $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ pour tout x de $]0,+\infty[$ 0,25 pts

   c) Montrer que : $\int_0^1 f(x)dx=e^{-1}$ 0,5 pts

3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives, $x=0$, $x=2$ et $y=0$. 0,5 pts

4) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=F(n)-F(n+2)$
   a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n il existe un nombre réel v_n appartenant à l'intervalle $]n,n+2[$ tel que: $u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$. 0,5 pts

   b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\leq u_n\leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$ 0,25 pts

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 0,25 pts

Partie :III

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$ 0,5 pts

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante. 0,25 pts

c) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $-\dfrac{1}{a_n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) = -\dfrac{1}{n}$ 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall t \in [0,+\infty[)$; $1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$ 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall x \in [0,+\infty[)$; $-\dfrac{x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ 0,5 pts

3) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$

a) Vérifier que : $a_4 \geq 1$, en déduire que : $a_n \geq 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$) . 0,5 pts

b) Montrer que : $1-\dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (Voir questions 3) a) et 3)b) de III). 0,5 pts

c) Montrer que : $\sqrt{\dfrac{n}{6}} \leq a_n$ (Voir questions 1) c) et 2)b) de III)). 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\dfrac{2}{n}}$

Bon Courage