Exercice .1 Bac National Sc maths - 2016 - Session : 2 6,5 points

$n$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par: $f_n(x)=\ln(x)-\dfrac{n}{x}$

$(C_n)$ est la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Etudier les deux branches infinies de la courbe $(C_n)$. 0,75 pts

b) Etudier les variations de la fonction $f_n$ sur $]0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations. 0,75 pts

c) Construire la courbe $(C_2)$. 0,5 pts

2) Montrer que la fonction $f_n$ est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. 0,5 pts

3) a) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ il existe un réel unique $\alpha_n\in]0,+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$ 0,5 pts

b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante. 0,5 pts

4) a) Montrer que : $(\forall x>0)$ ; $\ln(x)\leq x$ 0,5 pts

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$ 0,5 pts

5) Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose : $I_n=\dfrac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}f_n(t)dt$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (\exists c_n\in[\alpha_n,\alpha_{n+1}])$ ; $I_n=f_n(c_n)$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ; $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ 0,5 pts

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

Exercice .2 Bac National Sc maths - 2016 - Session : 2 3,5 points

$n$ est un entier naturel tel que $n\geq 2$.

On considère la fonction $g_n$ définie sur l'intervalle $[n,+\infty[$ par: $g_n(x)=\displaystyle\int_n^x\frac{1}{\ln t}dt$

1) a) Montrer que la fonction $g_n$ est dérivable sur $[n,+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée $g_n'$ 0,5 pts

b) Montrer que la fonction $g_n$ est strictement croissante sur $[n,+\infty[$ . 0,25 pts

2) a) Montrer que $(\forall x\geq n)$ ; $g_n(x)\geq\ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$. 0,5 pts (On admet que: $(\forall t\geq 0)$ ; $\ln(1+t)\leq t$ )

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)$ 0,25 pts

3) a) Montrer que $g_n$ est une bijection de $[n,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$. 0,25 pts

b) En déduire que : $(\forall n\geq 2)\ (\exists! u_n\geq n)$ ; $\displaystyle\int_n^{u_n}\frac{1}{\ln t}dt=1$ . 0,5 pts

4) On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3) b) .

a) Montrer que : $(\forall n\geq 2)$ ; $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt$. 0,5 pts

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante. 0,5 pts

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ 0,25 pts

Bon Courage