Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2016 - Session : 1 — 7,0 points

Partie :I

1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel x strictement positif , il existe un réel θ compris 0 et x tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$.

2) En déduire que :

a) $(\forall x>0)$; $1-x<e^{-x}$ b) $(\forall x>0)$; $x+1<e^{x}$ c) $(\forall x>0)$; $0<\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}<x$

Partie :II

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}$; $(x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,5 pts
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, pus interpréter graphiquement le résultat obtenu. 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x\geq 0)$; $x-\dfrac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1$ 0,25 pts (voir I) 2) a))

b) En déduire que : $(\forall x\geq 0)$; $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq\dfrac{x^2}{2}$ 0,5 pts

3) a) Vérifier que : $(\forall x>0)$; $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)$ 0,5 pts

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ 0,75 pts

4) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $(\forall x>0)$; $f'(x)=\dfrac{e^{x}(e^{x}-1-x)}{(e^{x}-1)^2}$ 0,75 pts

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ 0,5 pts (voir I) 2) b))

Partie :II

Soit la suite $(U_n)_{n\geq0}$ définie par: $U_0>0$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=\ln(f(U_n))$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n>0$. 0,5 pts
2) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq0}$ est strictement décroissante. En déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts
3) Montrer que 0 est la seule solution de l'équation $\ln(f(x))=x$ en déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\geq0}$ 0,5 pts

Exercice .2 Bac National Sc maths - 2016 - Session : 1 3,0 points

Soit la fonction F définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$.

1) a) Etudier le signe de $F(x)$, pour tout x de I. 0,5 pts

b) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle I et déterminer $F'(x)$, pour tout x de I. 0,5 pts

c) Montrer que F est strictement croissante sur l'intervalle I. 0,25 pts

2) a) En utilisant la nouvelle variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que pour tout x de I :

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

b) Calculer : $\lim_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x)$, pour tout x de I. 0,5 pts

3) a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle qu'on déterminera. 0,25 pts

b) Déterminer la bijection réciproque F^{-1} de la bijection F

Bon Courage