Exercice .1 Bac National Sc maths - 2015 - Session : 2 6,0 points

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par: $f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement les deux résultats obtenus. 0,75 pts

b) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 0,25 pts

2) a) Montrer que le point $I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_n). 0,5 pts

b) Construire la courbe (C_n). 0,5 pts

c) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_1) et les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$. 0,75 pts

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=x$ admet une solution unique $u_n\in]0,n[$. 0,75 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R})$; $f_n(x)<f_{n+1}(x)$ 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente . 0,75 pts

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 0,5 pts

Exercice .2 Bac National Sc maths - 2015 - Session : 2 4,0 points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$ et $g(0)=1$

1) Montrer que la fonction g est paire. 0,5 pts

2) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$ 0,75 pts

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x>0$:

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$ 0,5 pts

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $|g(x)|\leq\dfrac{2}{x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 0,75 pts

4) a) Vérifier que : $(\forall t>0)$; $1-\cos t\leq t$; en déduire que : $(\forall x>0)$; $0\leq\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt\leq 2x$ 0,5 pts

b) Vérifier que $(\forall x>0)$; $g(x)-\ln 3=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt$ 0,5 pts

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ 0,5 pts

Bon Courage