Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2015 - Session : 1 — 6,5 points

## Partie :I

Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=x(1+\ln^2 x)$ pour $(x>0)$

$(C_f)$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,5 pts

2) a) Montrer que la fonction $f$ est continue à droite au point 0. 0,25 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,5 pts.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$, en déduire que $f$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

3) a) Montrer que la courbe $(C_f)$ admet un point d'inflexion I d'abscisse $e^{-1}$. 0,25 pts

b) Etudier la position relative de la courbe $(C_f)$ et de la droite d'équation $y=x$. 0,25 pts

c) Construire la courbe $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ( On prendra $e^{-1}\approx 0,4$ ) 0,5 pts

## Partie :II

Soit la suite $(U_n)_{n\geq1}$ définie par: $U_0=e^{-1}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $U_{n+1}=f(U_n)$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $e^{-1}\leq U_n<1$. 0,5 pts

2) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts

3) On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

a) Montrer que $e^{-1}\leq L\leq 1$

b) Déterminer la valeur de $L$

## Partie :III

Soit la fonction numérique $F$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1) a) Montrer que la fonction $H: x \mapsto -\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall x>0)$ ; $\int_1^x t\ln^2(t)dt=\dfrac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$. 0,5 pts

c) En déduire que pour tout $x>0$ : $F(x)=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}\ln(x)+\dfrac{x^2}{2}\ln^2(x)$ 0,5 pts

2) a) Montrer que la fonction $F$ est continue sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ en déduire $\int_0^1 f(x)dx$

Exercice .2 — Bac National Sc maths - 2015 - Session : 1 — 3,5 points

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ et $g(0)=\ln 2$

1) a) Montrer que : $(\forall x>0)(\forall t\in[x,2x])$ ; $e^{-2x}\leq e^{-t}<e^{-x}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x>0)$ ; $e^{-2x}\ln 2\leq g(x)<e^{-x}\ln 2$ 0,5 pts

c) En déduire que g est continue à droite au point 0. 0,25 pts

2) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$ 0,75 pts

3) a) En utilisant le théorème des AF, démontrer que : $(\forall t>0)$ ; $-1\leq\frac{e^{-t}-1}{t}\leq -e^{-t}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x>0)$ ; $-1\leq\frac{g(x)-\ln 2}{x}\leq\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$ 0,5 pts

c) En déduire que g est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts

Bon Courage

inter-maths