Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2014 - Session : 2 — 7,5 points

Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 1 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus. 1pts
2) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$. 0,75 pts
3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $]0,1[$ par: $g_n(x)=f(x)-x^n$
   a) Montrer que g_n est strictement décroissante sur $]0,1[$. 0,25 pts
   b) En déduire que pour tout entier $n\geq 1$ il existe $\alpha_n\in]0,1[$ unique, tel que : $f_n(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$ 0,5 pts.
   c) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$: $g_n(\alpha_{n+1})<0$. 0,5 pts
   d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante , en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts
4) On pose que : $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$
   a) Vérifier que : $0<\alpha_1\leq L\leq 1$ 0,25 pts
   b) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $h(\alpha_n)=n$ avec $h(x)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$ 0,25 pts
   c) Montrer que : $L=1$ 0,25 pts
   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$ 0,25 pts

Partie :II

1) a) Etudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 f(t)dt$ pour tout x de $]0,+\infty[$. 0,25 pts

   b) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x>0)$; $\int_x^1 f(t)dt=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$ 0,5 pts

   c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $x=1$, $x=e^2$ et $y=0$. 0,25 pts

2) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$
   a) Montrer que pour tout entiers naturels n et k tels que : $n\geq 2$ et $1\leq k\leq n-1$, on a:
   $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\leq\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt\leq u_n\leq\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$ 0,5 pts
   c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=4$. 0,25 pts

Exercice .2 Bac National Sc maths - 2014 - Session : 2 2,5 points

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$.

1) **Pour tout x de IR, on pose : $k(x)=\int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$.**

a) **Vérifier que pour tout x de $[0,+\infty[$, ona : $g(x)=-k(\sqrt{x})$** 0,25 pts

b) **Montrer que la fonction g est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.** 0,5 pts

c) **Calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$, en déduire que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$** 0,5 pts

2) a) **Montrer que : $(\forall x>0)$; $\frac{g(x)-g(0)}{x}<-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$** 0,75 pts

b) **En déduire que la fonction g est non dérivable à droite au point 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.** 0,5 pts

Bon Courage