Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2014 - Session : 1 — 8,0 points

Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}$; $(x>0)$

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$. 0,25 pts

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

c) Montrer que : $(\exists\alpha\in]0,1[)$; $f'(\alpha)=0$. 0,5 pts

d) En déduire que : $(\exists\alpha\in]0,1[)$; $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$. 0,5 pts

Partie :II

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

(C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

1) a) Vérifier que : $(\forall x\in[1,+\infty[)$; $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{t^2}{1+t^2}\leq 1$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x\in[1,+\infty[)$; $F(1)-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$. 1 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. 1 pts

2) a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$. 0,5 pts

b) Etudier les variations de F sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

Partie :III

1) a) Vérifier que : $(\forall t\in]0,+\infty[)$; $-t\ln(t)\leq e$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall t\in[0,+\infty[)$; $f(t)\leq\dfrac{1}{e}$. 0,25 pts

c) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $F(x)<x$ 0,25 pts

2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0=]0,1[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=F(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n\in]0,1[$. 0,25 pts

b) Montrer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. 0,5 pts

Exercice .2 Bac National Sc maths - 2014 - Session : 1 2,0 points

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$; $(x>0)$

1) Montrer que la fonction g est continue sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts

2) Pour tout x de $[0,+\infty[$, on pose : $L(x)=\int_0^x g(t)dt$.

a) Montrer que la fonction L est continue sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

b) Calculer $L(x)$ pour tout $x>0$ 0,25 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ en déduire $L(0)$ 0,5 pts

3) Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite. 0,5 pts

Bon Courage