Exercice .1 | Bac National Sc maths - 2013 - Session : 2 | 8,25 points

1) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$; $(x>0)$

a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0 et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5 pts

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 0. 0,5 pts

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que sa fonction dérivée est définie par : $\forall x>0$; $f'(x)=\dfrac{-x\ln x(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 0,5 pts

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,5 pts

2) On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

(C_F) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $[e,+\infty[$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall t\geq e)$; $t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t$. 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall t\geq e)$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x \dfrac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$. 0,75 pts

d) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$. 0,5 pts

e) Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses . 0,5 pts

f) Construire (C_F). (On prendra $F(1)\approx 0,5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\approx 0,4$) 1 pts

3) Pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$, on pose : $\varphi(x)=x-F(x)$

a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, puis étudier les variations de la fonction φ. 0,75 pts

b) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, l'équation $\varphi(x)=n$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $[0,+\infty[$. 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\alpha_n\geq n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ 0,5 pts

4) a) Montrer que : $(\forall n\geq 1)$; $0<\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$ 0,5 pts b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$. 0,5 pts

Exercice .2 | Bac National Sc maths - 2013 - Session : 2 | 1,75 points

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $u_n=\left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n=\ln(u_n)$

1) Vérifier que : $(\forall n\geq 1)$; $v_n=n^2\left[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))\right]$. 0,25 pts

2) En utilisant le TAF Montrer que : $(\forall n\geq 1)(\exists c\in]n;n+1[)$; $v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$ 0,5 pts

3) Montrer que : $(\forall n\geq 1)$; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$ 0,5 pts

4) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. 0,5 pts

Bon Courage