Partie :I

1) Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par: $h(1)=1$ et $h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$; $(x>1)$

   a) Montrer que la fonction h est continue à droite au point 1. 0,25 pts

   b) Montrer que : $\forall x>1$; $\ln x<x-1$ en déduire que h est strictement décroissante $]1,+\infty[$. 0,75 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ puis dresser le tableau de variations de h.

   b) En déduire que : $\forall x\geq 1$; $0<h(x)\leq 1$. 0,25 pts

Partie :II

On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par : $g(1)=\ln 2$ et $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}dt$; $x>1$

(C) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que : $(\forall t>1)$; $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$. 0,25 pts

   b) Montrer que : $(\forall t>1)$; $g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$. 0,25 pts

   c) Montrer que : $(\forall t>1)$; $g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$. 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>1)$; $(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$. 0,5 pts

   b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1. 0,5 pts

   c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ 0,75 pts

3) a) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $(\forall x>1)$; $g'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$. 0,75 pts

   b) En déduire que : $(\forall x\geq 1)$; $0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$ puis dresser le tableau de variations de g 0,5 pts

   c) Construire (C). 0,5 pts

Partie :III

A) 1) Montrer que la fonction $k: x \mapsto g(x)-x+1$ est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $]-\infty;\ln 2]$. 0,5 pts

   2) En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha\in]1;+\infty[$ tel que $1+g(\alpha)=\alpha$ 0,25 pts

B) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $1\leq U_0<\alpha$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=1+g(U_n)$

   1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1\leq U_n<\alpha$. 0,5 pts

      b) Montrer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante 0,5 pts

      c) Montrer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$. 0,75 pts

   2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$. 0,5 pts

      b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|U_0-\alpha|$. 0,5 pts

      c) En déduire une deuxième fois que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$. 0,25 pts

Bon Courage