Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2012 - Session : 2 — 7,5 points

Partie I :

Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$

1) Etudier les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts
2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$ 0,5 pts

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. 1 pts
2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x}g(e^{-x})$. 0,5 pts
3) Dresser le tableau de variations de f . 0,5 pts
4) Construire (C) la courbe de f et (C') la courbe de $(-f)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 1 pts

(On admet que (C) admet un point d'inflexion unique dont l'abscisse est $-0,7$).

5) Montrer que pour tout x de $]0,1[$: $0<f'(x)<g(e)$ 0,75 pts
6) Montrer que l'équation $f(x)+x=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-1<\alpha<0$ 0,75 pts

7) On considère la suite $(U_n)_{n\geq0}$ définie par: $U_0=0$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=-f(U_n)$
   a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $-1\leq U_n\leq 0$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_{n+1}-\alpha|\leq g(e)|U_n-\alpha|$. 0,5 pts
   c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_n-\alpha|\leq (g(e))^{n}$. 0,5 pts
   d) Sachant que $g(e)<0,6$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,25 pts

Exercice .2 — Bac National Sc maths - 2012 - Session : 2 — 2,5 points

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt$

1) Calculer $F(1)$. 0,25 pts
2) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x>0$ 0,5 pts
   b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $F(x)=0$ 0,5 pts
3) En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x>0$:

$$F(x)=\left(\operatorname{Arc}\tan(x)+\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\operatorname{Arc}\tan(t)}{t}\,dt$$ 0,5 pts

4) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(x)$. 0,25 pts

5) En déduire que : $(\forall x>0)$; $\ln x=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\operatorname{Arc}\tan(t)}{t}\,dt$ 0,5 pts

Bon Courage