Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2012 - Session : 1 — 5,5 points

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle IR par: $f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}$

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)$ 0,5 pts

2) a) Etudier la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $-\infty$. 0,5 pts

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_n) au voisinage de $+\infty$ et Déterminer la position relative de (D) et de (C_n). 0,5 pts

3) Etudier les variations de la fonction f_n puis dresser son tableau de variations. 0,75 pts

4) Construire la courbe (C_3). 0,5 pts (On prendra : $f_3(-1{,}5)\approx 0$, $\ln 3\approx 1{,}1$ et $f_3(-0{,}6)\approx 0$)

5) a) Montrer que pour tout $n\geq 3$: $\dfrac{e}{n}<\ln(n)$ 0,25 pts

b) Montrer que pour tout $n\geq 3$, l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n tels que : $\dfrac{-e}{n}<y_n<0$ et $x_n<-\ln(n)$ 0,25 pts

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 0,5 pts

6) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=-1$ et $f(x)=-1-x\ln x$; $(x>0)$

a) Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0 . 0,25 pts

b) Vérifier que pour tout $n\geq 3$; $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right)=\dfrac{\ln n}{x_n}$ 0,5 pts

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln n}{x_n}$ 0,25 pts

Exercice .2 — Bac National Sc maths - 2012 - Session : 1 — 4,5 points

Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par: $F(0)=1$ et $F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2}$; $(x\in]0;1])$

1) Soit x un élément de l'intervalle $[0;1]$, montrer que : $(\forall t\in[0,x])$; $\dfrac{1}{1+2x}\leq\dfrac{1}{1+2t}\leq 1$ 0,5 pts

2) Soit x un élément de l'intervalle $]0;1]$.

a) Montrer que : $F(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}dt$ 0,5 pts

b) Montrer que : $\dfrac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq 1$, en déduire que F est continue à droite au point 0. 0,75 pts

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in[0;1])\ ;\ \int_0^x\frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$$ 0,75 pts

4) Soit x un élément de l'intervalle $]0;1]$.

a) Montrer que : $F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0,5 pts

b) Montrer que : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2t)^2}$. 0,75 pts

c) En appliquant le TAF à la fonction F sur $[0;x]$, montrer que :

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} .$$ 0,75 pts

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 est déterminer le nombre dérivé à droite de 0. 0,25 pts

Bon Courage