Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2011 - Session : 2 — 6,0 points

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$.
(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1cm .

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$. 1 pts

2) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f . 0,5 pts
b) Montrer que la fonction est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ vers un intervalle J qu'on déterminera, puis dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1} . 0,75 pts

3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$, puis construire les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sur le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. 0,5 pts

4) a) Montrer que $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx=1$. (on pourra poser : $t=f^{-1}(x)$) 0,5 pts
b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe $(C_{f^{-1}})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e+1$ et $y=x$. 0,5 pts

5) On considère l'équation (E_n) : $x+\ln x=n$
a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n. 0,25 pts
b) Déterminer la valeur de x_1 puis démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ 0,5 pts

6) a) Montrer que : $(\forall n\ge 1)\ ;\ f(x_n)\le f(n)$, en déduire que : $(\forall n\ge 1)\ ;\ x_n\le n$ 0,5 pts
b) Montrer que : $(\forall n\ge 1)\ ;\ n-\ln n\le x_n$ 0,5 pts
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n-n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n}{n-\ln n}\right)$. 0,5 pts

Exercice .2 — Bac National Sc maths - 2011 - Session : 2 — 4,5 points

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle IR par: $f_n(x)=-1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}$

1) Montrer que pour tout $n\ge 2$, il existe un réel unique α_n de $]0;1[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$ 0,5 pts

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge 2}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente (On pose : $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_n$) 0,75 pts

3) a) Vérifier que pour tout réel $t\ne 1$: $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$ 0,5 pts
b) En déduire que : $(\alpha_n)+\dfrac{(\alpha_n)^2}{2}+\dfrac{(\alpha_n)^3}{3}+\cdots+\dfrac{(\alpha_n)^n}{n}=-\ln(1-\alpha_n)-\int_0^{\alpha_n}\dfrac{t^n}{1-t}dt$ 0,5 pts

4) a) Montrer que : $1+\ln(1-\alpha_n)=-\int_0^{\alpha_n}\dfrac{t^n}{1-t}dt$ 0,5 pts
b) Montrer que : $(\forall n\ge 2)\ ;\ 0\le\int_0^{\alpha_n}\dfrac{t^n}{1-t}dt\le\dfrac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$ 0,5 pts
c) En déduire que : $L=1-e^{-1}$

Bon Courage