Exercice .1 — Bac National Sc maths - 2011 - Session : 1 — 6,5 points

Partie :I Etude des solutions positives de l'équation : (E) : $e^x = x^n$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction f définie sur $D = [0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$; $x \neq 0$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que pour tout x de $]0,1[\cup]1,+\infty[$: $\left(e^x = x^n \iff n = f(x) \right)$ 0,25 pts
2) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts
3) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. 0,5 pts 0,5 pts 0,5 pts
4) Etudier les variations de la fonction f sur $[0,1[$ et $]1,+\infty[$ puis dresser son tableau variations. 0,75 pts
5) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique dont on déterminera les coordonnées. 0,5 pts
6) Construire (C_f). 0,5 pts
7) Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1 < a_n < e < b_n$ 0,5 pts

Partie :I Etude de convergence des suites : $(a_n)_{n\geq3}$ et $(b_n)_{n\geq3}$.

1) Montrer que : $(\forall n \geq 3)$; $b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq3}$. 0,5 pts
2) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq3}$ est décroissante , en déduire qu'elle est convergente . 0,5 pts

   b) Montrer que : $(\forall n \geq 3)$; $\dfrac{1}{n} < \ln(a_n) < \dfrac{e}{n}$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geq3}$. 0,5 pts c) b)

   Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n = e$. 0,5 pts

Exercice .2 — Bac National Sc maths - 2011 - Session : 1 — 3,5 points

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1) a) Montrer que : $(\forall x \geq 0)$; $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$ 0,5 pts

   b) Montrer que : $(\forall x \geq 1)$; $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, en déduire la limite de la la fonction F au voisinage de $+\infty$ 0,5 pts
2) Montrer que la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que : $(\forall x \geq 0)$; $F'(x) \leq e^{-2x^2} - 2xF(x)$. 0,5 pts
3) Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ par : $G(\pi/2)=0$ et $G(x)=F(x)$; $x \neq \pi/2$ 0,75 pts

   a) En déduire que la fonction G est continue à gauche au point $\pi/2$. 0,5 pts

   b) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que : $F'(c)=0$) et $F(c)=\dfrac{1}{2c}e^{-2c^2}$. 0,75 pts

   (on pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction G sur l'intervalle $[0,\pi/2]$)
4) Soit la fonction H définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $H(x) = F'(x)\dfrac{e^{x^2}}{2x}$

   a) Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. 0,5 pts

   b) Montrer que le réel c est unique et donner le tableau de variations de F . 0,5 pts

Bon Courage