Partie I :

On considère la fonction f définie sur $I=[0,1]$ par : $f(1)=0$ et $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)}$; $0\le x<1$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) Montrer que la fonction f est continue à gauche au point 0. 0,5 pts
2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche au point 0. 0,5 pts
3) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis dresser son tableau de variations. 0,75 pts
4) a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\dfrac{e-1}{e}$. 0,5 pts
   b) Construire la courbe (C_f) et sa demi-tangente à droite au point 0. 0,75 pts
5) Montrer qu'il existe un réel unique α dans l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha)=\alpha$ 0,5 pts
6) a) Montrer que la fonction I est une bijection de I vers I. 0,5 pts
   b) Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout y de I. 0,5 pts

Partie II :

On pose $I_0=\int_0^1 f(t)dt$ et pour tout entier non nul n : $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt$ considère.

1) Montrer que que la suite $(I_n)_{n\ge0}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente. 0,75 pts
2) Montrer que : $(\forall n\ge 0)$; $0\le I_n\le \dfrac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\ge0}$.

Partie II :

Pour tout réel x de l'intervalle $J=[0,1[$ et pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$F_0(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \text{et} \quad F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt \quad \text{et} \quad F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt \quad \text{et} \quad S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in J)$; $F(x)-S_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$ 1 pts
2) a) Montrer que la fonction $x\mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur J. 0,5 pts
   b) En déduire que la fonction $t\mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0,x]$ pour tout x de J. 0,5 pts
3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in J)$; $0\le F(x)-S_n(x)\le \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 1 pts
   b) En déduire que pour tout x de l'intervalle J : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=F(x)$. 0,5 pts
4) a) Déterminer $F(x)$ pour tout x de l'intervalle J. 0,5 pts
   b) Déterminer la limite: $\lim\limits_{x\to1^-} F(x)$. 0,25 pts

Bon Courage