Exercice .1 Bac National Sc maths - 2010 - Session : 1 6,25 points

Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$ par: $f(x)=4x\,e^{-x^2}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,25 pts
2) Etudier les variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations. 0,5 pts
3) Déterminer l'équation de la demi-tangente de (C_f) à l'origine du repère puis construire (C_f). 0,5 pts

   (On admet que le point d'abscisse $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est un point d'inflexion à la courbe (C_f))
4) Calculer l'intégrale : $a=\int_0^1 f(x)dx$, en déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x=1$. 0,5 pts

Partie :II

n est un entier naturel tel que $n\geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f_n(x)=4x^n\,e^{-x^2}$

1) a) Montrer que : $(\forall x>1)$; $e^{-x^2}\leq e^{-x}$. 0,5 pts
   b) En déduire la limite de la fonction f_n quand x tend vers $+\infty$. 0,5 pts
2) Etudier les variations de la fonction f_n puis dresser son tableau de variations. 0,5 pts
3) Montrer que pour tout $n\geq 2$, il existe un réel unique $u_n\in]0;1[$ tel que $f_n(u_n)=1$ 0,5 pts
4) a) Vérifier que $(\forall n\geq 2)$; $f_{n+1}(u_n)=u_n$. 0,5 pts
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,25 pts
5) On pose : $L=\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$. 0,75 pts
   a) Montrer que : $0<L\leq 1$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $(\forall n\geq 0)$; $\dfrac{-\ln 4}{n}<\ln(u_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln 4}{n}$. 0,5 pts
   c) En déduire que : $L=1$. 0,5 pts

Exercice .1 Bac National Sc maths - 2010 - Session : 1 3,75 points

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1) Montrer que la fonction g est impaire. 0,5 pts
2) On pose pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$: $\varphi(x)=\int_1^x\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$
   a) Vérifier que : $(\forall x>0)$; $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$. 0,25 pts
   b) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x>0$. 0,5 pts
   c) En déduire le sens de variations de F sur $]0,+\infty[$. 0,5 pts

3) **a)** **En utilisant le TAF montrer que :** $(\forall x>0)(\exists c\in]x;2x[)\ ;\ F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$. 0,5 pts

b) **en déduire que :** $(\forall x>0)\ ;\ \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$ 0,5 pts

c) **Déterminer les limites :** $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ 0,5 pts

d) **Vérifier que :** $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)<\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$ et $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ 0,5 pts

En déduire que l'équation : $F(x)=x$ **admet une solution unique dans l'intervalle** $]0,+\infty[$

Bon Courage