**Partie I :**

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1) a) Etudier les variations de la fonction $g$ . 0,5 pts

b) Dresser le tableau de variations de $g$ . 0,5 pts

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\left]\ln 4;\ln 6\right[$ . 0,5 pts

( On prend $\ln 2\approx 0{,}7$ et $\ln 3\approx 1{,}1$ )

b) Etudier le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}_+$. 0,5 pts

3) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0=0$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ ; $U_{n+1}=2(1-e^{-U_n})$

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ ; $1\leq U_n\leq\alpha$. 0,5 pts

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ ; $U_{n+1}-U_n=g(U_n)$. 0,25 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. 0,25 pts

d) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. 0,5 pts

**Partie II :**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

$(C_f)$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 0,5 pts

2) a) Vérifier que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ . 0,5 pts

b) Montrer que $f'(x)=g(x)e^{-x}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de f. 0,75 pts.

3) Tracer la courbe $(C_f)$. ( On prend $\alpha\approx 1{,}5$ ) 1pts

**Partie III :**

On considère la fonction $F$ définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par :

$$F(0)=-\ln 2 \quad \text{et} \quad (\forall x>0)\ ;\ F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$$

1) a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x>0)$; $F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$

b) montrer que : $(\forall x>0)$ ; $e^x\ln 2\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$ 0,5 pts 0,5 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ en déduire que la fonction est continue à droite au point 0 . 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $F(x)\leq\dfrac{1-e^x}{2x}$ 0,25 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 0,25 pts

3) Montrer que $F$ est dérivable sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ et que : $F'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2$ 0,5 pts

4) a) Soit $x$ un élément de l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$, Montrer qu'il existe un réel $c$ de $\left]0,x\right[$ tel que:

$F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}xe^{2c}$ . 0,75 pts (utiliser le TAF deux fois)

**b)** **Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$,**

$$-\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2} \text{ .}$$ 0,75 pts

**c)** **En déduire que la fonction $F$ est dérivable à droite au point 0 et que $F_d'(0)=-\frac{1}{2}$.** 0,25 pts

Bon Courage