n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f_n(0)=0$ et $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$; $(x>0)$

Partie I : (C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite au point 0. (poser $x=t^n$) 0,5 pts

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite au point 0. 0,25 pts

c) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_2(x)}{x}$. 1 pts

2) a) Etudier les variations de la fonction f_1. 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction f_2. 0,5 pts

3) a) Etudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2). 0,25 pts

b) Construire (C_1) et (C_2). (on admet que le point A(1 ;1) est un point d'inflexion pour (C_2)) 0,5 pts

Partie II : On considère la fonction F définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]-\infty;0]$ et que : $(\forall x<0)$; $F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ 0,5 pts

b) En déduire le sens de variations de F sur $]-\infty;0]$. 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x<0)$; $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$ 0,25 pts

b) Vérifier que la fonction $x \mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $]0;+\infty[$. 0,25 pts

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_{e^x}^{1} f_n(t)dt=\frac{3}{4}$ 0,25 pts

3) On suppose que F admet une limite L quand x tend vers $-\infty$, montrer que : $\dfrac{3}{8}\le L\le\dfrac{3}{4}$. 0,25 pts

Partie III :

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$

1) a) Montrer que : $(\forall n\ge1)$; $U_n>0$ 0,5 pts

b) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur l'intervalle $[1;e]$ 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall n\ge1)$; $U_{n+1}\le U_n$ 0,25 pts

d) En déduire que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est convergente . 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall n\ge1)$; $U_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}U_n$ 0,5 pts

b) En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par les courbes (C_1) et (C_2) les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. 0,5 pts

3) a) Montrer que : $(\forall n\ge2)$; $\dfrac{1}{n+1}\le U_n\le\dfrac{1}{n-1}$ (utiliser les questions précédentes) 0,75 pts

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$. 0,5 pts

4) **a est un nombre réel différent de** U_1 .

On considère la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ **définie par :** $V_1 = a$ et $(\forall n \geq 1)\ ;V_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2}V_n$

et pour tout entier $n \geq 1$ on pose **:** $d_n = |V_n - U_n|$

a) **Montrer que :** $(\forall n \geq 1)\ ;d_n = \dfrac{n!}{2^{n-2}}d_1$ 0,25 pts

b) **Montrer que :** $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty.$ 0,5 pts

c) **En déduire que la suite** $(V_n)_{n\geq 1}$ **est divergente.** 0,25 pts

Bon Courage