Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left]-1/2;+\infty\right[$ par: $f(0)=2$ et $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$; $x \neq 0$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue au point 0 . 0,5 pts

2) Pour tout réel non nul a de l'intervalle I on considère la fonction numérique f définie sur I par :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a)-2a)x^2 - (\ln(1+2x)-2x)a^2$$

a) Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ en déduire qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$ 0,5 pts

b) En déduire que la fonction est dérivable au point 0 et que $f'(0) = -2$. 0,75 pts

3) a) Montrer que f est dérivable sur $I-\{0\}$ et que :

$$(\forall x \in I-\{0\}) \; ; \; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \quad \text{avec} \quad g(x) = 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x \in I-\{0\})$; $g(x) < 0$ 0,5 pts

c) En déduire les variations de la fonction f. 0,25 pts

4) a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. 0,5 pts

b) Montrer qu'il existe un réel α unique de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$. 0,5 pts

c) Construire la courbe (C_f) (On prend $\alpha \approx 1{,}3$)

Partie :II

1) On pose $J = [1;\alpha]$ et $(\forall x \in I)$; $\varphi(x) = \ln(1+2x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$; $0 < \varphi'(x) < \dfrac{2}{3}$. 0,5 pts

b) Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que $\varphi(J) \subset J$. 0,75 pts

2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \ln(1+2U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \in J$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

Partie :III

1) On considère la fonction F définie sur I par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) Montrer que la fonction F est dérivable sur I puis calculer $F'(x)$. 0,5 pts

b) En déduire le sens des variations de F sur I. 1 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 1)$; $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$ 0,5 pts

b) En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ 0,5 pts

3) On suppose que F admet une limite L à droite au point $-\frac{1}{2}$.

4) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[-1/2;+\infty[$ par:

$$G(-\frac{1}{2})=L \quad \text{et} \quad G(x)=F(x)\ ;\ x\in I$$ 0,5 pts

a) En utilisant le TAF montrer : $(\forall x \in I)$; $F(x)-L \geq f(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) En déduire que la fonction G est non dérivable à droite au point $-\frac{1}{2}$. 0,5 pts

Bon Courage