**Partie I :**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=2x-e^{-x^2}$

$(C_f)$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ et interpréter déométriquement le résultat obtenu. 0,5 pts

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau de variations de f. 0,5 pts

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$ tel que $0<\alpha<1$. 0,5 pts

d) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ 0,5 pts

2) Tracer la courbe $(C_f)$. ( On prend $\alpha\approx0{,}4$ ) 0,5 pts

**Partie II :**

On considère les deux fonctions $\varphi$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(0)=1 \;\; ; \;\; \varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad \text{et} \qquad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

1) a) montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)(\exists c\in]0;x[)\;;\;\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$ 0,5 pts

b) En déduire que $\int_0^x e^{-t^2}dt<1$. 0,5 pts

2) a) Montrer que : $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$. 0,5 pts

b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)$ ; $g'(x)=f(x)$

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\beta$ tel que $\alpha<\beta<1$. 0,5 pts

3) a) Montrer que la fonction $\varphi$ est continue à droite au point $0$ 0,5 pts

b) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ ; $\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ 0,5 pts

c) Montrer que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ ; $\varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ 0,75 pts

d) Montrer $\varphi([0;1])\subset[0;1]$ 0,5 pts

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)$ ; $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x\in]0;1[)$ ; $|\varphi'(x)|\le\frac{2}{3}$ 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)$ ; $\varphi(x)=x \iff g(x)=0$ 0,25 pts

5) On considère la suite $(U_n)_{n\ge0}$ définie par: $U_0=2/3$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $U_{n+1}=\varphi(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $0\le U_n\le1$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ ; $|U_{n+1}-\beta|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\ge0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. 0,5 pts

Bon Courage