Partie I :

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+x-e^{-x}$

a) Etudier les variations de g. 0,25 pts

b) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ 0,5 pts

c) En déduire que $x_0=0$ est la seule solution de l'équation $g(x)=0$. 0,25 pts

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. 0,5 pts

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. 0,25 pts

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,25 pts

d) Tracer la courbe (C_f). 0,5 pts

3) a) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$. 1 pts

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle est convergente. 0,5 pts

c) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$

Partie II :

1) a) Montrer que l'équation $f(x)=1$ est équivalente à l'équation $e^{-x}=x$ 0,25 pts .

b) Montrer que l'équation $e^{-x}=x$ admet une solution unique l'équation $\alpha=x_1$ et que $\dfrac{1}{e}\leq\alpha\leq 1$. 0,5 pts

2) On considère la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ définie par : $y_1=1$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $y_{n+1}=e^{-y_n}$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{e}\leq y_n\leq 1$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $|y_{n+1}-\alpha|\leq e^{-\frac{1}{e}}|y_n-\alpha|$. 0,5 pts

c) en déduire que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est convergente en déterminant sa limite 0,5 pts

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(0)=\dfrac{1}{2}\ln 2$ et $\forall x>0$; $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$

1) a) Montrer que : $(\forall t>0)$; $\dfrac{1}{1+t}\leq f(t)<\dfrac{1}{t}$. 0,25 pts

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall t\geq 0)$; $1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\dfrac{t^2}{2}$. 0,25 pts

b) Montrer que pour tout t appartenant à $]0;4[$: $\dfrac{1}{2t}\leq f(t)\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{4-t}\right)$: 0,5 pts

c) En déduire que F est continue à droite au point 0. 0,25 pts

3) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x>0$ 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction F sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts