Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+(x-1)e^{x}$

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$. 0,5 pts
2) Montrer que $x_0=0$ est la seule solution de l'équation $g(x)=0$. 0,25 pts

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$; $x\neq 0$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$. 0,5 pts
2) Montrer que la fonction f est continue au point 0. 0,25 pts
3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. 0,5 pts
   b) En déduire les variations de la fonction f. 0,25 pts
4) On considère la fonction J définie sur $\mathbb{R}$ par : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$
   a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $J(x)=e^{-x}(e^{x}-1-x)$. 0,5 pts
   b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\leq J(x)\leq \dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ 1 pts
   c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}\leq \dfrac{e^{x}-1-x}{x^2}\leq \dfrac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$ 0,5 pts
   d) En déduire que la fonction f est dérivable au point 0 et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 0,75 pts
5) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f''(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-1)^3}\left(e^{x}(x-1)+2+x\right)$. 0,5 pts
   b) Etudier le signe de $e^{x}(x-1)+2+x$ sur $\mathbb{R}$. 0,5 pts
   c) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f''(x)>0$. 0,25 pts
   d) Construire (C_f). 0,5 pts

Partie III :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0=1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=f(U_n)$

1) Montrer que $x=\ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x)=x$. 0,25 pts
2) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$
3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\leq U_n\leq 1$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_{n+1}-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\ln 2|$. 0,5 pts
   c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. 0,5 pts

Partie IV :

On considère la fonction F définie sur IR par : $F(0)=0$ et $\forall x \in IR^*$; $F(x)=\int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in IR^*)$; $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \le F(x) < \frac{x^2}{e^x-1}$. 0,5 pts

b) Montrer que la fonction F est continue au point 0. 0,25 pts

c) Montrer que la fonction F est dérivable au point 0 et que $F'(0)=1$. 0,5 pts

2) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur IR^* et que $F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$ pour $x \neq 0$ 0,5 pts

b) Etudier les variations de la fonction F . 0,25 pts

Bon Courage