Partie I :

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$

1) Calculer $g(1)$ 0,25 pts

2) En partant du tableau de variations de la fonction g ci-contre , Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$. 0,5 pts

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. 0,5 pts

b) Montrer que la droite $(D): y=x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,5 pts

c) Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe (C_f). 0,25 pts

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement. 0,75 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$. pour tout x de $]0,+\infty[$. 1 pts

b) Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$. 0,5 pts

c) Dresser son tableau de variations sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

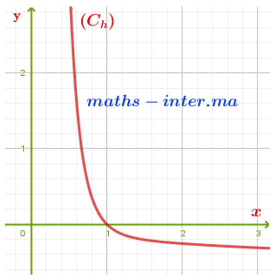
4) Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). 1 pts

Partie III :

On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=f(x)-x$ 0,25 pts

1) a) Vérifier que $h(0)=1$

b) sur la figure ci-contre (C_h) est la coure de la fonction h.



Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$. 0,5 pts

En déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$, $f(x)\le x$

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $1\le u_n\le e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Bonne Chance