Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1) Vérifier que $g(0) = 0$ 0,25 pts
2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. 0,5 pts

Partie II :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm.

1) a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} + x$, pour tout x de $\mathbb{R}$, en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 0,5 pts

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x]$, en déduire que la droite $(D): y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,75 pts

   c) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 0,5 pts

   c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ sont de même signe pour tout x de $\mathbb{R}$. 0,25 pts

   b) En déduire que (C_f) se trouve au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0, 1]$. 0,5 pts

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$. pour tout x de $\mathbb{R}$. 0,75 pts

   b) En déduire que f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. 0,5 pts

   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,75 pts

4) a) Montrer que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. 0,25 pts

   c) Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion dont d'abscisses respectives 1 et 4. 0,5 pts

5) Tracer sur le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). (On prend $f(4) \approx 4{,}2$) 1 pts

6) a) Vérifier que la fonction $H: x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, En déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \dfrac{2e - 5}{e}$. 0,5 pts

   b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \dfrac{e - 2}{e}$. 0,75 pts

   c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. 0,75 pts

Partie III : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \le u_n \le 1$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Bonne Chance