Partie I : On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

1) Calculer $g(1)$ 0,25 pts

2) En partant du tableau de variations de la fonction g ci-contre , Montrer que :
$g(x)\leq 0$ pour tout x de $]0,1]$.
$g(x)\geq 0$ pour tout x de $[1,+\infty[$. 1 pts

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\infty$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1cm.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement. 0,5 pts

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$. 0,25 pts

b) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(D): y=x$ en $+\infty$. 0,75 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. pour tout x de $]0,+\infty[$. 1 pts

b) Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$. 0,75 pts

c) Dresser son tableau de variations sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$ 0,5 pts

b) En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées. 0,5 pts

c) Montrer que $f(x)\leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,2]$, en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$. 0,75 pts

5) Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). 1 pts
(On admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique dont l'abscisse est compris entre 2,4 et 2,5)

6) a) Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$. 0,5 pts

b) Vérifier que $H: x \mapsto 2\ln x - x$ est une primitive de $h: x \mapsto \frac{2}{x}-1$ sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$. 0,5 pts

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. 0,5 pts

Partie III : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in \mathbb{N}$; $1\leq u_n\leq 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Bonne Chance