On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1cm.

Partie I :

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 0,25 pts

b) Montrer que la droite $(D): y=2x-2$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. 0,5 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,5 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=2(e^{x}-1)^{2}$. pour tout x de $]0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur IR. (Remarquer que $f'(0)=0$) 0,25 pts

c) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α dans l'intervalle $]1,\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$ 0,75 pts

4) a) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite $(D): y=2x-2$ sur chacun des intervalles $]-\infty,\ln 4[$ et $]\ln 4,+\infty[$ 0,5 pts

b) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonné $(0,-5)$. 0,5 pts

c) Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). 1 pts

(On prend $\alpha\approx 1{,}3$ et $\ln 4\approx 1{,}4$)

5) a) Montrer que $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})dx=-\frac{9}{2}$. 0,5 pts

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 4$. 0,5 pts

Partie II :

1) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y''-3y'+2y=0$ 0,5 pts

b) Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) telle que : $g(0)=-3$ et $g'(0)=-2$. 0,5 pts

2) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ par : $h(x)=\ln(e^{2x}-4e^{x})$

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur IR.

b) Vérifier que $h(\ln 5)=\ln 5$, puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$.

Bonne Chance