On considère la fonction f à variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

Partie I :

1) **Soit D_f le domaine de définition de la fonction f. Montrer que $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$.** 0,5 pts

2) a) **Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique des résultats.** 0,75 pts

b) **Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$** 0,5 pts

c) **Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat.** 0,5 pts

3) a) **Montrer que $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f.** 0,75 pts

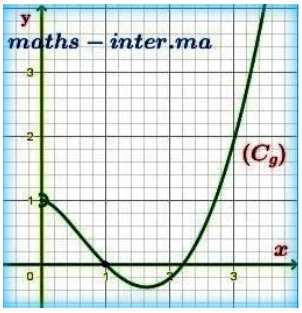
b) **Etudier les variations de la fonction f sur D_f.** 1 pts

c) **Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.** 0,25 pts

Partie II : On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

(C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé(voir figure).



1) a) **Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :**

$(E):\ x\in]0,+\infty[\ ;\ g(x)=0$ 0,5 pts

b) **On donne le tableau de valeurs :**

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	−0,14	−0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que $2,2<\alpha<2,3$ 0,5 pts

2) a) **Montrer que $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f.** 0,25 pts

b) **Montrer que la droite $(\Delta): y=x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 1 et α.** 0,5 pts

c) **A partir de la courbe (C_g), Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1,\alpha]$ et montrer que $f(x)-x\leq 0$ pour tout x de $[1,\alpha]$.** 0,5 pts

3) **Construire sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f).** 1,25 pts

4) a) **Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$.**

b) **Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.** 0,5 pts

Partie III :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) **Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $1\leq u_n\leq\alpha$.** 0,5 pts

2) **Montrer que la suite (u_n) est décroissante.** 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite. 0,75 pts

Bonne Chance