Partie I :

Soit la fonction : $g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$

1) Montrer que $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$, en déduire les variations de g . 0,5 pts

2) Calculer $g(1)$ en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$ 0,75 pts

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement. 0,5 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. 0,25 pts

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=0$. 1 pts

c) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,25 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$. pour tout $x\in]0,+\infty[$, en déduire les variations de f . 1,5 pts

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$, en déduire que : $\forall x\in]0,+\infty[$; $f(x)\geq 2$. 1 pts

c) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 0,75 pts

(On admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique dont les coordonnées ne sont pas demandées).

4) On considère les intégrales :

$I=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$ et $J=\int_1^e (1+\ln x)dx$

a) Montrer que $H: x \mapsto x\ln x$ est une primitive de $h: x\mapsto 1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$, en déduire que $I=e$. 0,5 pts

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $J=2e-1$. 0,75 pts

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. 0,5 pts

Bonne Chance