

I.

Dénombrement

1) Informations générales :

a) Cardinale d'un ensemble:

✓ Considérons un ensemble  $E$  contenant les éléments  $a$ ,  $b$  et  $c$ , alors on écrit :  $E = \{a, b, c\}$ .  
Le cardinale de l'ensemble  $E$  est le nombre des éléments de cet ensemble, on le note  $\text{Card}E$  ( Cardinal de  $E$  )

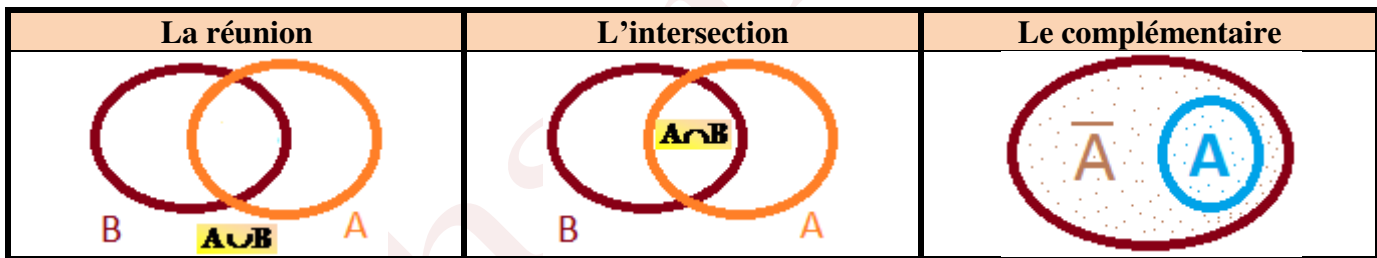
Dans le cas de notre exemple, on a  $\text{Card}E = 3$ .

- ✓ L'ensemble vide ne contient aucun élément, on le note  $\phi$  ce qui fait  $\text{Card}\phi = 0$
- ✓  $E$  un ensemble de référence ( ou référentiel), soit  $A$  une partie de  $E$ . Le complémentaire de  $A$  dans  $E$  est le sous ensemble de  $E$  noté  $\bar{A}$  et qui contient tous les éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

On a donc :  $\text{Card}\bar{A} = \text{Card}E - \text{Card}A$

- ✓ L'intersection de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensembles des élément appartenant à l'ensemble  $A$  et à l'ensemble  $B$ , on le note  $A \cap B$ .
- ✓ La réunion de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensembles des élément appartenant à l'ensemble  $A$  ou à l'ensemble  $B$ , on le note  $A \cup B$ .

On a :  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$



- ✓ Le produit cartésien de l'ensemble  $A = \{1,2\}$  suivi de l'ensemble  $B = \{a, b, c\}$  est l'ensemble noté  $A \times B$ :

$A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$

On a :  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B$

b) Nombres spéciaux :

$\forall n \in \mathbb{N}^* ; n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$			
$0! = 1$			
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$		$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	
$C_n^n = 1$	$C_n^0 = 1$	$A_n^1 = n$	$A_n^0 = 1$
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^1 = n$	$C_n^1 = n$	$A_n^n = n!$
$C_n^{n-p} = C_n^p$		$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$	

2) **Dénombrement:**

le dénombrement c'est la détermination du nombres de possibilité d'une expérience

a) **Cas simples:**

- ✚ Le nombre de résultats possibles du lancement d'une pièce de monnaie est  $N = 2$ .
- ✚ Le nombre de résultats possibles du lancement d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 est  $N = 6$ .
- ✚ Le nombre de résultats possibles du tirage d'une carte d'un sac contenant dix cartes est  $N = 10$ .
- ✚ En général, le nombre de résultats du choix d'un objet parmi  $p$  objets est  $N = p$ .

b) **Cas composés : le principe fondamental du dénombrement :**

Si une procédure peut être découpée en deux étapes, et qu'il y a  $m$  façons possibles de réaliser la première étape, et qu'il y a  $n$  façons possibles de réaliser la seconde étape, alors la procédure peut être accomplie de  $nm$  façons.

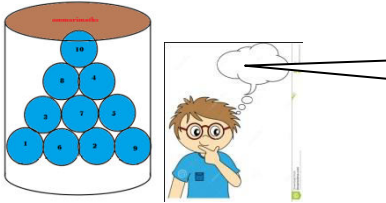
**Exemple :**

Considérons l'expérience suivante dont la réalisation est découpée en trois étapes :

- ✚ On lance en l'air un dé à six faces ( de 1 à 6)
- ✚ Puis on lance une pièce de monnaie ( P ou F)
- ✚ On tire une boule d'un sac contenant 10 boules.

Le nombre de possibilités est :  $N = 6 \times 2 \times 10 = 120$

a) **Types de Tirages :**

Introduction au dénombrement par l'étude des différentes méthodes de tirage		
<p>Une urne contient <math>n</math> boules <math>n = 10</math> On tire <math>p</math> boules de l'urne <math>p = 3</math></p>		<div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; display: inline-block;">                 Mais de quelle façon ?             </div>
<div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; margin-bottom: 5px; display: inline-block;">Types de tirage</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; border: 1px solid black;">Tirage simultané</div> <div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; border: 1px solid black;">Tirage successif</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; border: 1px solid black;">Tirage simultané</div> <div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; border: 1px solid black;">sans remise</div> <div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; border: 1px solid black;">avec remise</div> </div>		
<p><u>Question :</u> On tire simultanément <math>p = 3</math> boules de l'urne ; Quel est le nombre de cas possibles ?</p>	<p><u>Question :</u> On tire successivement et sans remise <math>p = 3</math> boules de l'urne ; Quel est le nombre de cas possibles ?</p>	<p><u>Question :</u> On tire successivement et avec remise <math>p = 3</math> boules de l'urne ; Quel est le nombre de cas possibles ?</p>
Pour répondre ; On utilise le principe fondamental du dénombrement		

$3 \times N_3 = N_2 = \frac{10!}{(10-3)!}$ $N_3 = N_2 = \frac{10!}{3 \times (10-3)!} = C_{10}^3$ <p style="text-align: center;"><b>En general</b></p> $N_3 = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$	$N_2 = \frac{T_1}{[10]} \times \frac{T_2}{[9]} \times \frac{T_3}{[8]}$ $N_2 = 10 \times 9 \times 8 = \frac{10!}{7!} = \frac{10!}{(10-3)!} = A_{10}^3$ <p style="text-align: center;"><b>En general</b></p> $N_2 = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$	$N_1 = \frac{T_1}{[10]} \times \frac{T_2}{[10]} \times \frac{T_3}{[10]}$ $N_1 = 10^3$ <p style="text-align: center;"><b>En general</b></p> $N_1 = n^p$
<p><u>Chaque triage successif sans remise s'appelle un arrangement de n objets pris p à p</u></p>	<p><u>Chaque triage successif sans remise s'appelle un arrangement de n objets pris p à p</u></p>	
<p><u>Permutations avec répétition :</u>                  Quel est le nombre de mots qu'on peut écrire, en utilisant les mêmes lettres contenues dans le mot suivant:                  AMMARIABOUSAMAH</p> $N = \frac{15!}{5! \times 3!}$	<p><u>Permutations sans répétition</u>                  Quel est le nombre de mots qu'on peut écrire, en utilisant les mêmes lettres contenues dans le mot suivant:                  AMMARIABOUSAMAH</p> $N = \frac{15!}{5! \times 3!}$	

Bonne Chance