

I.

Limites

I.

1) Règles de Calcul

Somme	Produit	Rapport
$+\infty + \infty = +\infty$ et $-\infty - \infty = -\infty$	$(a > 0).(+\infty) = +\infty$ et $(a < 0).(+\infty) = -\infty$	$\frac{1}{+\infty} = 0^+$
$+\infty = +\infty$ et $a - \infty = -\infty$ ( $a \in \mathbb{R}$ )	$(a > 0).(-\infty) = -\infty$ et $(a < 0).(-\infty) = +\infty$	$\frac{1}{-\infty} = 0^-$
$+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$ FI	$(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$ et $0.(\pm\infty)$ FI	$\frac{0}{0} = \text{FI}$ et $\frac{\infty}{\infty} = \text{FI}$
Autres règles		
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

2) Interprétations des limites

تمثل الأشكال التالية منحنى دالة  $f$  في وضعيات مختلفة بجوار النقطة  $x_0 = 1$ .

<p>لدينا حسب المنحنى :  <math>f(x_0) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots</math></p> <p><b>ملاحظات:</b>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots</math> لدينا :                  لأن :  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)</math>                  الدالة <math>f</math> متصلة على النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> متصلة على يسار النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> غير متصلة في النقطة <math>x_0</math> لأنها متصل على ..... و على ..... هذه النقطة .</p>	<p>لدينا حسب المنحنى :  <math>f(x_0) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots</math></p> <p><b>ملاحظات:</b>                  الدالة <math>f</math> لا نهاية عند النقطة <math>x_0</math>.                  لأن :  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)</math>                  الدالة <math>f</math> غير متصلة على النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> ..... على يسار النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> غير متصلة في النقطة <math>x_0</math> لأنها غير ..... على ..... هذه النقطة .</p>	<p>لدينا حسب المنحنى :  <math>f(x_0) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots</math></p> <p><b>ملاحظات:</b>                  الدالة <math>f</math> لا نهاية عند النقطة <math>x_0</math>.                  لأن :  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)</math>                  الدالة <math>f</math> متصلة على النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> ..... على يسار النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> غير متصلة في النقطة <math>x_0</math> لأنها غير ..... على ..... هذه النقطة .</p>	<p>لدينا حسب المنحنى :  <math>f(x_0) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots</math></p> <p><b>ملاحظات:</b>                  الدالة <math>f</math> لا نهاية عند النقطة <math>x_0</math>.                  لأن :  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)</math>                  الدالة <math>f</math> غير متصلة على النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> ..... على يسار النقطة <math>x_0</math>.  <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \dots f(x_0)</math> لأن :                  الدالة <math>f</math> غير متصلة في النقطة <math>x_0</math> لأنها غير ..... على ..... هذه النقطة .</p>
<p><math>f</math> متصلة على يمين <math>x_0</math>  <math>\Downarrow \quad \Uparrow</math></p>	<p><math>f</math> متصلة في <math>x_0</math>  <math>\Uparrow \quad \Downarrow</math></p>	<p><math>f</math> متصلة على يسار <math>x_0</math>  <math>\Downarrow \quad \Uparrow</math></p>	

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \dots f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \dots f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \dots f(x_0)$$

II.

Continuité sur un intervalle – Fonctions réciproques

II.

1) Continuité sur un intervalle

**تعريف:** (a)

نقول أن الدالة  $f$  متصلة على المجال المفتوح  $]a, b[$  إذا كانت  $f$  متصلة في كل نقطة من هذا المجال .  
 نقول أن الدالة  $f$  متصلة على المجال المغلق  $[a, b]$  إذا كانت  $f$  متصلة على المجال المفتوح  $]a, b[$  ومتصلة على يمين  $a$  ويسار  $b$ .

**خاصيات:** (b)

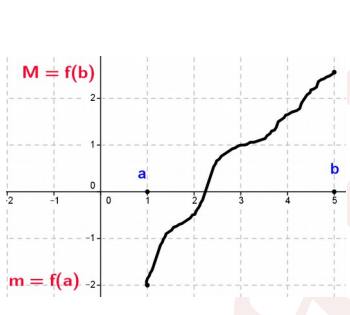
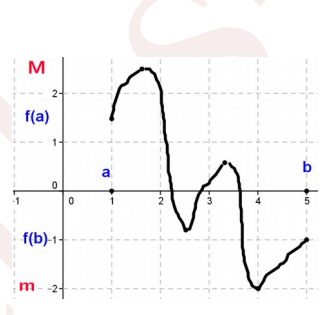
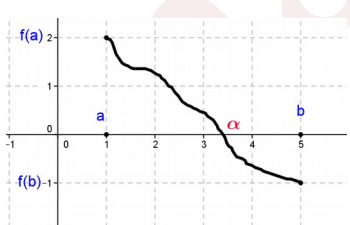
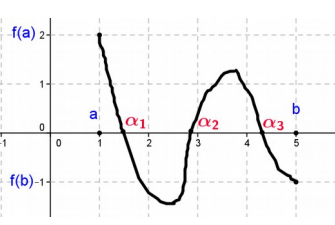
- جميع الدوال الحدودية و الجدرية و اللاجدرية و الدوال المثلثية هي دوال متصلة على مجموعة تعريفها.
- مجموع دالتين متصلتين على مجال هي دالة متصلة على هذا المجال .
- جداء دالتين متصلتين على مجال هي دالة متصلة على هذا المجال .
- جداء دالة متصلة على مجال بعدد حقيقي هي دالة متصلة على هذا المجال .
- إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على مجال حيث أن  $g$  لا تتعدم فإن الدالة  $\frac{f}{g}$  متصلة على هذا المجال .
- إذا كانت  $f$  دالة متصلة على مجال فإن الدالة  $\sqrt{f}$  و  $\sqrt[3]{f}$  وبصفة عامة  $\sqrt[n]{f}$  هي دالة متصلة على هذا المجال .
- إذا كانت  $f$  متصلة في النقطة  $x_0$  و  $g$  متصلة في النقطة  $f(x_0)$  فإن الدالة  $g \circ f$  متصلة في النقطة  $x_0$ .

**مبرهنة القيم الوسطية:** (c)

- المبرهنة الأساسية:
- إذا كانت دالة  $f$  متصلة على مجال  $[a, b]$  ، فإن صورة المجال  $[a, b]$  هو مجال مغلق  $[m, M]$  بحيث  $m = \inf f$  و  $M = \sup f$ .
- إذا كانت دالة  $f$  متصلة و تزايدية قطعاً على مجال  $[a, b]$  ، فإن صورة المجال  $[a, b]$  هو المجال المغلق  $[f(a), f(b)]$ .
- إذا كانت دالة  $f$  متصلة و تناقصية قطعاً على مجال  $[a, b]$  ، فإن صورة المجال  $[a, b]$  هو المجال المغلق  $[f(b), f(a)]$ .

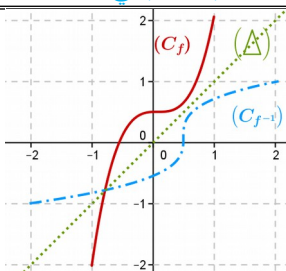
**أشكال :**

**مبرهنات :**

		<ul style="list-style-type: none"> <li>إذا كانت دالة <math>f</math> متصلة على مجال <math>[a, b]</math> ، فإن صورة المجال <math>[a, b]</math> هو مجال مغلق <math>[m, M]</math> بحيث <math>m = \inf f</math> و <math>M = \sup f</math> (الشكل 1).</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>إذا كانت دالة <math>f</math> متصلة ورتبية قطعاً على مجال <math>[a, b]</math> ، فإن صورة المجال <math>[a, b]</math> هو المجال المغلق <math>[f(a), f(b)]</math> إذا كانت تزايدية (الشكل 2) و <math>[f(b), f(a)]</math> إذا كانت تناقصية.</li> <li>إذا كانت دالة <math>f</math> متصلة على مجال <math>[a, b]</math> بحيث <math>f(a)f(b) &lt; 0</math> فإن المعادلة <math>f(x) = 0</math> تقبل حلاً على الأقل ينتمي إلى المجال <math>]a, b[</math>.</li> <li>إذا كانت دالة <math>f</math> متصلة ورتبية قطعاً على مجال <math>[a, b]</math> بحيث <math>f(a)f(b) &lt; 0</math> فإن المعادلة <math>f(x) = 0</math> تقبل حلاً وحيداً ينتمي إلى المجال <math>]a, b[</math>.</li> </ul>

2) Continuité sur un intervalle

(a) خاصية عامة :

<p>■ التمثيل المبياني للدالة العكسية :</p> 	<p>■ <u>خاصية :</u></p> <p>إذا كانت دالة <math>f</math> متصلة ورتبية قطعاً من المجال <math>I</math> نحو المجال <math>J</math> فإنها توجد دالة نرمز لها <math>f^{-1}</math> معرفة من المجال <math>J</math> نحو المجال <math>I</math> متصلة ولها نفس رتابة الدالة <math>f</math> وتحقق ما يلي :</p> $(\forall x \in J)(\forall y \in I) ; f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ <p>الدالة <math>f^{-1}</math> تسمى الدالة العكسية للدالة <math>f</math>.</p>
<p><u>ملاحظة:</u></p> <p><math>(C_{f^{-1}})</math> هي مماثلة <math>(C_f)</math> بالنسبة للمنصف الأول وهو المستقيم <math>y = x</math> الذي معادلته <math>(\Delta)</math>.</p>	<p><u>ملاحظة:</u></p> $(\forall x \in J)(\forall t \in I) ; f \circ f^{-1}(x) = x \text{ et } f^{-1} \circ f(t) = t$

(b) الجدور النونية :

ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .  
 نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة من  $\mathbb{R}_+$  نحو  $\mathbb{R}_+$  كما يلي :  $f_n(x) = x^n$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+)$   
 على سبيل المثال مهما يكن  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  فإن :  $f_2(x) = x^2$  ;  $f_3(x) = x^3$  ;  $f_7(x) = x^7$  ....  
 مهما يكن  $n$  ، فإن الدالة  $f_n$  متصلة وتزايدية قطعاً من المجال  $I = ]0, +\infty[$  نحو المجال  $J = ]0, +\infty[$  ومنه فإنها تقبل دالة عكسية  $f_n^{-1}$  معرفة من المجال  $J$  نحو المجال  $I$ .

مهما يكن  $x \in \mathbb{R}_+$  نضع :  $f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  ؛ العدد  $\sqrt[n]{x}$  يسمى الجذر النوني للعدد الموجب  $x$  . ونرمز له أيضاً بـ  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

وهكذا يمكن أن نستنتج ما يلي :  $t = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = t^n$  ;  $(\forall x \geq 0)(\forall t \geq 0)$  .  
 من العبارة السابقة نستنتج ما يلي:

$$(\forall x \geq 0)(\forall t \geq 0) ; t = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = t^2$$

$$(\forall x \geq 0)(\forall t \geq 0) ; t = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = t^3$$

.....

$$(\forall x \geq 0)(\forall t \geq 0) ; t = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}} \Leftrightarrow x = t^7$$

.....

•  $\sqrt{x}$  أو  $\sqrt[2]{x}$  : هو الجذر المربع الموجب للعدد  $x$  .

•  $\sqrt[3]{x}$  : هو الجذر المكعب الموجب للعدد  $x$  .

.....

•  $\sqrt[7]{x}$  : هو الجذر الموجب من الرتبة 7 للعدد  $x$  .

.....

(c) خاصيات الجذور النونية :

سبق إن رأينا أن الجذور النونية تكتب على شكل قوة عدد حقيقي موجب أسه عدد كسري .  
 يمكن أن نبرهن بكامل البساطة وانطلاق من تعريف الجذور النونية على أن هذه الأخيرة تحقق جميع خصائص القوى بدون استثناء من هنا يصبح من السهل تعميم مفهوم القوة الى قوة عدد حقيقي أسه عدد كسري .

■ أمثلة : أكتب الأعداد التالية على شكل جذور نونية لأعداد بسيطة :

$$16^{\frac{4}{6}} ; 81^{\frac{3}{4}} ; 81^{\frac{3}{4}} ; 125^{\frac{5}{9}} ; 625^{\frac{4}{6}}$$

إجابة :

.....

■ **خصائص:**

مهما تكن الأعداد الحقيقية الموجبة قطعا  $a$  و  $b$ ، ومهما تكن الأعداد الجدرية  $m$  و  $n$  فإن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} ; (ab)^n = a^n b^n ; (a^n)^m = a^{nm} ; \frac{1}{a^m} = a^{-m} ; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} ; a^n a^m = a^{n+m} ; a^0 = 1$$

■ **مهما يكن  $n \geq 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) فإن:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

(a) **التمثيل المبياني للجذور النونية:**

$f(x) = \sqrt[4]{x}$	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$f(x) = \sqrt[2]{x}$
$g(x) = x^4$ هي الدالة العكسية للدالة $f$	$g(x) = x^3$ هي الدالة العكسية للدالة $f$	$g(x) = x^2$ هي الدالة العكسية للدالة $f$

III.

**Dérivabilité**

III.

(1) **قابلية اشتقاق دالة في نقطة:**

<p>■ <b>التمثيل المبياني للدالة العكسية:</b></p>	<p>■ <b>تعريف:</b></p> <p>الدالة <math>f</math> قابلة للاشتقاق في نقطة <math>x_0</math> يعني أن : النهاية التالية</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$ <p>تتتمي إلى <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p><math>L</math> يسمى العدد المشتق للدالة <math>f</math> في النقطة <math>x_0</math> ونرمز له ب</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R} : \text{نكتب } f'(x_0)$
<p><b>ملاحظة:</b></p> <p>عندما يكون <math>L = \pm \infty</math> نكون <math>f</math> غير قابلة للاشتقاق في نقطة <math>x_0</math> لكن منحناها <math>(C_f)</math> يقبل مماس يوازي محور الأرتاب.</p>	<p>هندسيا فإن العدد المشتق <math>f'(x_0)</math> يمثل المعامل الموجه للمماس المنحني <math>(C_f)</math> في النقطة ذات الأفصول <math>x_0</math>.</p>

(2) **خصائص وصيغ عامة:**

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(\alpha f)' = \alpha f'$	$(f.g)' = f'.g + f.g'$	$(f^r)' = r.f^{r-1}.f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$	$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x).f'(x)$

(3) **مشتقات الدوال المرجعية:**

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
--------	---------	--------	---------	--------	---------

$U^n$	$n.U^{n-1}.U'$	$\sin U$	$U'.\cos U$	$\ln U$	$\frac{U'}{U}$
$\sqrt{U} = U^{\frac{1}{2}}$	$U^{\frac{1}{2}-1}.U' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\cos U$	$U'.\sin U$	$e^U$	$U'e^U$
$\sqrt[n]{U} = U^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.U^{\frac{1}{n}-1}.U'$	$\tan U$	$U'.(1 + \tan^2 U) = \frac{U'}{\cos^2 U}$	$\text{Arc tan } U$	$\frac{U'}{1+U^2}$

**(4) الدوال الأصلية :**

**(a) تعريف وخاصيات :**

- الدالة الأصلية لدالة  $f$  على مجال  $I$  هي كل دالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  بحيث :  $F'(x) = f(x) ; (\forall x \in I)$ .
- إذا كانت الدالتين  $F$  و  $G$  أصليتين لنفس الدالة  $f$  على مجال  $I$  ، فإنه  $F'(x) = G'(x) ; (\forall x \in I)$  وهذا يعني أن  $G(x) = F(x) + Cte ; (\forall x \in I)$ .
- لإيجاد بعض الدوال الأصلية نعتد على الجدولين السابقين حول الدوال المشتقة .

**(b) تطبيقات :**

حدد الدوال الأصلية للدالة في كل حالة :

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + e^x ; f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} ; f(x) = \sin(2x) + \frac{1}{x} ; f(x) = 2x^3 - 5x + 2$$

**إجابة :**

**(5) الدالة المشتقة الثانية :**

<p><b>تطبيق :</b></p>	<p><b>تعريف وخاصية :</b></p> <p><b>تعريف :</b> نرمز للدالة المشتقة الثانية لدالة <math>f</math> بالرمز <math>f''</math> وهي المشتقة الأولى للدالة <math>f'</math> على سبيل المثال نعتبر الدالة التالية : <math>f(x) = 2x^3 - \cos x</math> لدينا <math>f'(x) = 6x^2 + \sin x</math> ومنه <math>f''(x) = 12x + \cos x</math></p> <p><b>خاصية :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>إذا كان لدينا <math>f''(x) &gt; 0</math> على مجال <math>I</math> ، فإن <math>(C_f)</math> تكون محدبة على المجال <math>I</math>.</li> <li>إذا كان لدينا <math>f''(x) &lt; 0</math> على مجال <math>I</math> ، فإن <math>(C_f)</math> تكون مقعرة على المجال <math>I</math>.</li> <li>إذا كان <math>f''(x)</math> تتعدم وتغير إشارتها في نقطة <math>x_0</math> ، فإن النقطة ذات الأفصول <math>x_0</math> هي نقطة انعطاف بالنسبة للمنحنى <math>(C_f)</math>.</li> </ul>
-----------------------	---

IV.

**Branches infinies**

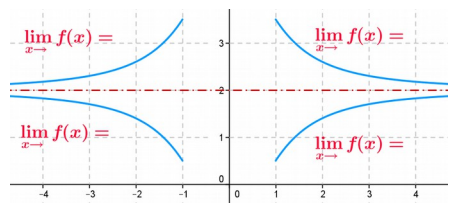
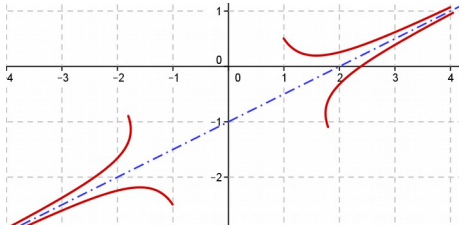
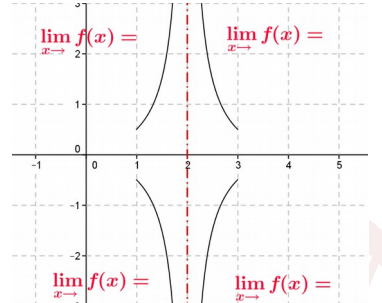
IV.

**(1) الفروع اللانهائية :**

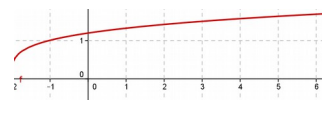
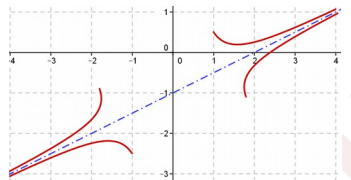
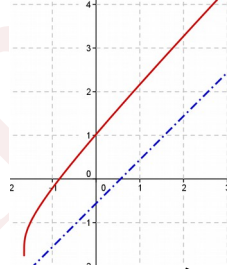
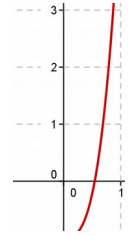
المنحنى  $(C_f)$  للدالة  $f$  يقبل فرعا لانهايا إذا كان  $X$  أو  $f(x)$  يؤول الى  $\pm\infty$  . أي في الحالات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

ويمكن تحديد طبيعة الفرع اللانهائي حسب كل حالة باستعمال الجدول التالي :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ : إذا كان	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ : إذا كان	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ : إذا كان
	<p>المستقيم <math>(\Delta) : y = ax + b</math> مقارب مثل ل <math>(C_f)</math>                  بجوار <math>\infty</math> يعني أن :  <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0</math></p> 	
..... الذي معادلته ..... مقارب ..... للمنحنى $(C_f)$ بجوار .....	$(C_f) \quad f(x) - (ax + b) > 0$ $(\Delta)$ $(C_f) \quad f(x) - (ax + b) < 0$ $(\Delta)$	..... الذي معادلته ..... مقارب ..... للمنحنى $(C_f)$ بجوار .....

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
---	---

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ : إذا كان	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ : إذا كان	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ : إذا كان
 <p>..... المنحنى <math>(C_f)</math> يقبل .....                  في اتجاه (.....) .....                  بجوار .....</p>	 <p>..... المنحنى <math>(C_f)</math> يقبل .....                  في اتجاه (.....) .....                  بجوار .....</p>	 <p>..... الذي معادلته .....                  مقارب ..... للمنحنى .....  <math>(C_f)</math> بجوار .....</p>
		 <p>..... المنحنى <math>(C_f)</math> يقبل .....                  في اتجاه (.....) .....                  بجوار .....</p>

Bonne Chance